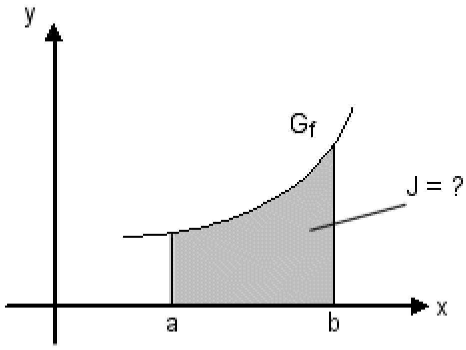
Numerische Integration (s. auch Applet auf www.mathematik.ch)

Voraussetzungen und Zielsetzung

Voraussetzung: Eine Funktion f sei auf dem abgeschlossenen Intervall I = [a,b] stetig.

Gesucht: Bestimmtes Integral $J = \int_a^b f(x)\,dx$

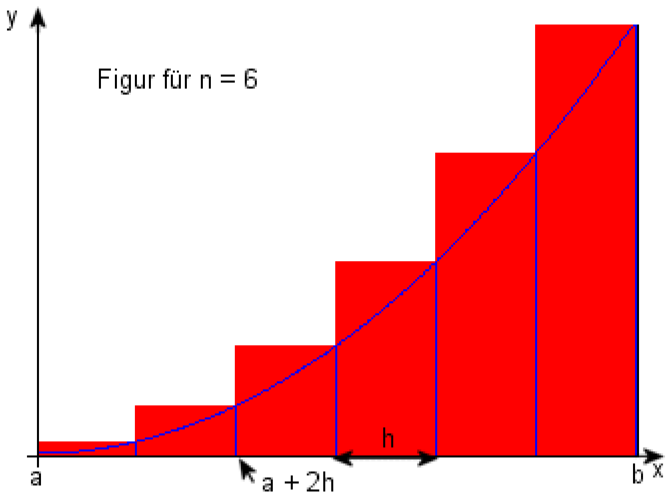


Interpretation: Falls $f(x) \geq 0$ in I, so entspricht J dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen G_f und der x-Achse in I:

1. Mit Hilfe der Definition des bestimmten Integrals (Obersumme)

Man zerlegt das Intervall I in n gleich lange Teilintervalle und berechnet dann die sogenannte Obersumme O(n):

(Approximation durch Rechtecke; Ersetzen von f durch **konstante** Teilfunktionen)



$$h = \frac{b-a}{n}$$

Bei monoton steigenden Funktionen wird jeweils der rechte Endpunkt im Teilintervall gewählt. Die Endpunkte haben dann die Werte a + i h, ihre Funktionswerte (die Rechteckshöhe) daher die Werte f(a+ i h).

Es gilt also:

$$\boxed{O(n) = h\sum_{i=1}^{n} f(a+i\,h) \qquad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n}}$$

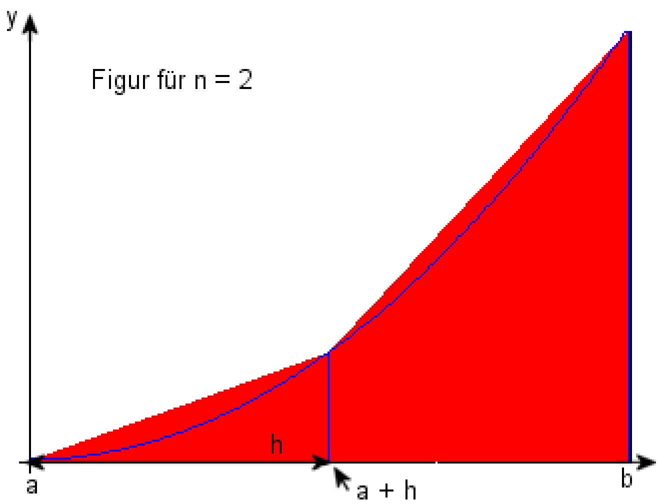
Bei monoton fallenden Funktionen müssten für O(n) die linken Endpunkte im Teilintervall gewählt werden (vgl. auch Applet). Da aber für J ohnehin der

Grenzübergang $n \to \infty$ (bzw. $h \to 0$) zu machen ist, kann man sich in einem Programm zur Approximation von J mit der oben erwähnten Formel für O(n) für alle stetigen Funktionen begnügen.
Dieser Algorithmus taugt aber nur sehr beschränkt zur Berechnung von J:
Erstens konvergiert er i.a. sehr langsam (lange Rechenzeiten) und führt dadurch auch zu effektiven Fehlern bei einer Abbruchbedingung von z.B. $|O(n+1) - O(n)| < \varepsilon$.

2. Trapezregel

Man zerlegt auch hier das Intervall I in n gleich lange Teilintervalle und berechnet dann die Summe der Trapezflächen T(n):

(Approximation durch Trapeze; Ersetzen von f durch **lineare** Teilfunktionen)



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$T(2) = \frac{h}{2}(\ f(a)+f(a+h) + f(a+h)+f(b)\ )$$

$$T(2) = \frac{h}{2}(\ f(a) + f(b) + 2f(a+h)\ )$$

für n = 3: Beachten Sie, dass $h = \frac{b-a}{3}$ wird:

$$T(3) = \frac{h}{2}(\ f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + f(b)\ ) = \frac{h}{2}(\ f(a) + f(b) + 2f(a+h) + 2f(a+2h)\ )$$

Also für beliebiges n: $h = \frac{b-a}{n}$

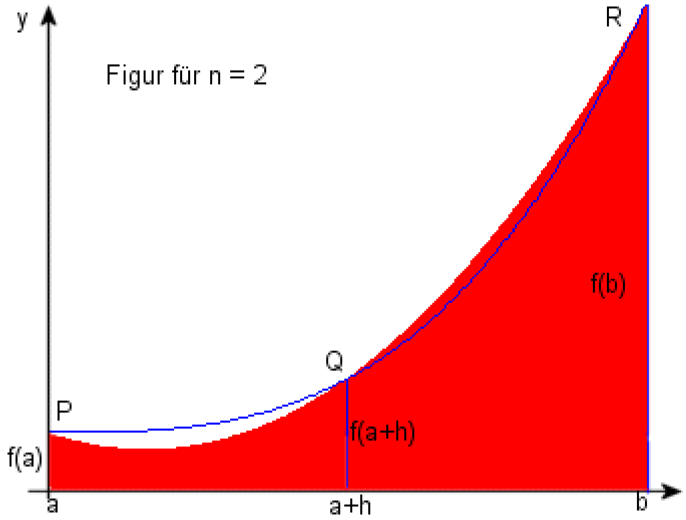
$$T(n) = \frac{h}{2}(\ f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)\ )$$

Definiert man $T_0 := f(a) + f(b)$ und $T_1 := f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h)$, so gilt:

$$\boxed{T(n) = \frac{h}{2}\left(\ f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\ \right) = \frac{h}{2}(\ T_0 + 2T_1\ )}$$

In einem Programm muss man also T_0 nur einmal berechnen und dann – bei gegebenem n – zuerst h und nachher T_1 berechnen.

3. Simpson - Regel



Man zerlegt auch hier das Intervall I in n gleich lange Teilintervalle und ersetzt die Funktion f in je zwei Teilintervallen durch eine **quadratische** Funktion g. Daher muss n hier gerade sein!

Ansatz für die Funktion g:
$g(x) = Ax^2 + Bx + C$
Sie ist jeweils durch die drei Punkte P, Q und R bestimmt.

Der Trick besteht nun darin, nicht A, B und C zu berechnen, sondern das $\int g(x)dx$ im Teilintervall der Breite 2h durch die drei Ordinaten (y-Werte) der drei Punkte P, Q und R anzugeben.

Berechnung von $\int g(x)dx$ in einem solchen Teilintervall der Breite 2h:
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man nun a:=0, daher b=2h setzen.

$P(0/y_1)$, $Q(h/y_2)$ und $R(2h/y_3)$ liegen auf den Graphen von f und g.

Ansatz: $S = \int_0^{2h} g(x)\,dx := k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3$ $\quad$ k_1, k_2 und k_3 = ??

$y_1 = g(0) = C$; $\quad y_2 = g(h) = Ah^2 + Bh + C$; $\quad y_3 = g(2h) = 4Ah^2 + 2Bh + C$

$$S = \int_0^{2h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]_0^{2h} = A\frac{8h^3}{3} + B2h^2 + C2h =$$
$$= k_1C + k_2(Ah^2 + Bh + C) + k_3(4Ah^2 + 2Bh + C)$$

Es gilt also: $\frac{8A}{3}h^3 + B2h^2 + C2h = Ah^2(k_2 + 4k_3) + Bh(k_2 + 2k_3) + C(k_1 + k_2 + k_3)$

Dies soll eine Identität sein. Daher führt der Koeffizientenvergleich auf das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{r} \frac{8h}{3} = k_2 + 4k_3 \\ 2h = k_2 + 2k_3 \\ 2h = k_1 + k_2 + k_3 \end{array}\right|$$

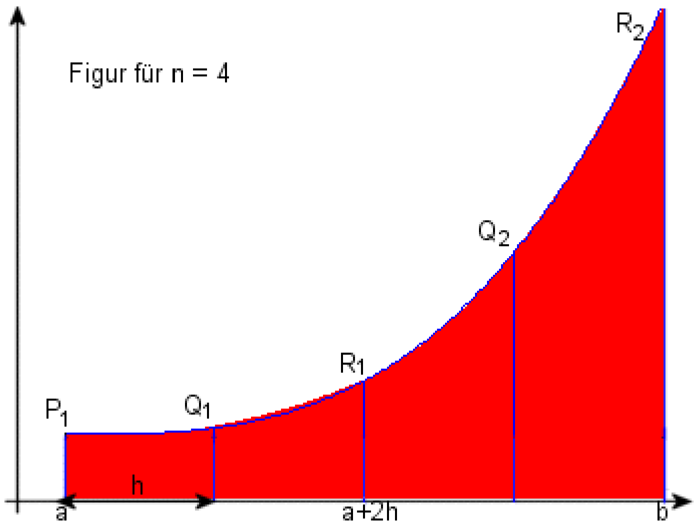
Dieses System hat die Lösung $k_1 = k_3 = \frac{h}{3}$, $k_2 = \frac{4h}{3}$, d.h. es gilt:

$$S = \int_0^{2h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

Nimmt man wieder die beliebigen Werte a und b für die Intervallgrenzen, so gilt für n=2 der Wert **$S(2) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\, f(a+h) + f(b) \right)$** $\quad h = \frac{b-a}{2}$

Verallgemeinerung:

$S(4) = ?\qquad h = \frac{b-a}{4}$



Man benötigt zwar nun eine Parabel durch die Punkte P_1, Q_1 und R_1, sowie eine zweite Parabel durch die Punkte $P_2=R_1$, Q_2 und R_2. Dank der Berechnungsart mit Hilfe der Ordinaten der 'Stützpunkte' muss aber keine neue Berechnung der Koeffizienten A, B und C gemacht werden!

$$S(4) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\, f(a+h) + f(a+2h) + f(a+2h) + 4\, f(a+3h) + f(b) \right) =$$

$$S(4) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\,(f(a+h) + f(a+3h)) + 2\, f(a+2h) \right)$$

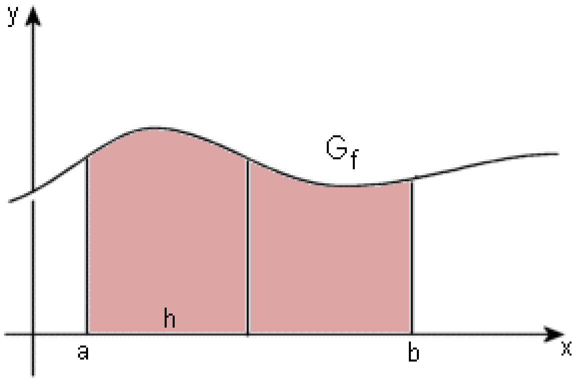
$$S(n) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\, f(a+h) + f(a+2h) + f(a+2h) + 4\, f(a+3h) + f(a+4h) + \ldots + f(a+(n-2)h) + 4\, f(a+(n-1)h) + f(b) \right)$$

Für n gerade, $h = \frac{b-a}{n}$, $0 < i < n$ gilt also:

$$S(n) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i\ \text{ungerade}} f(a+ih) + 2 \sum_{i\ \text{gerade}} f(a+ih) \right)$$

Kepler'sche Fassregel zur Berechnung von Volumina

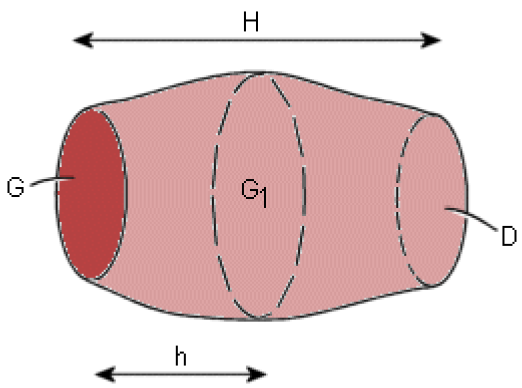
Gemäss der Formel von Simpson gilt für den Fall n=2:



$$S(2) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\, f(a+h) + f(b) \right)$$

mit $\quad h = \frac{b-a}{2}$

Überträgt man nun diese Formel auf den Raum, indem man ein 'Fass' mit der Grundfläche G, der Deckfläche D, der Höhe H und dem Mittelschnitt G_1 in der halben Höhe $\frac{H}{2}$ betrachtet (s. Figur), so entspricht f(a) der Grundfläche G, f(b) der Deckfläche D, $h = \frac{H}{2}$ und f(a+h) dem Mittelschnitt G_1.



Also gilt:

Volumen $V = \frac{h}{3}(G + 4G_1 + D)$

$$\boxed{\mathbf{V = \frac{H}{6}(G + 4G_1 + D)}}$$

Kepler'sche Fassregel

Behauptung: Diese Formel liefert exakte Werte für Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf, Kugel, Paraboloid usw.

z.B. für:

Kugel mit Radius R: $\quad (H = 2R,\ G = D = 0)$:

$$V = \frac{2R}{6}(0 + 4R^2\pi + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Kreiskegel mit Leitkreisradius r und Höhe H $\left(G = r^2\pi,\ \ G_1 = \frac{r^2}{4}\pi,\ \ D = 0\right)$

$$V = \frac{H}{6}\left(r^2\pi + 4\frac{r^2}{4}\pi + 0\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

Zeigen Sie, dass die Behauptung auch für den Pyramidenstumpf richtig ist.