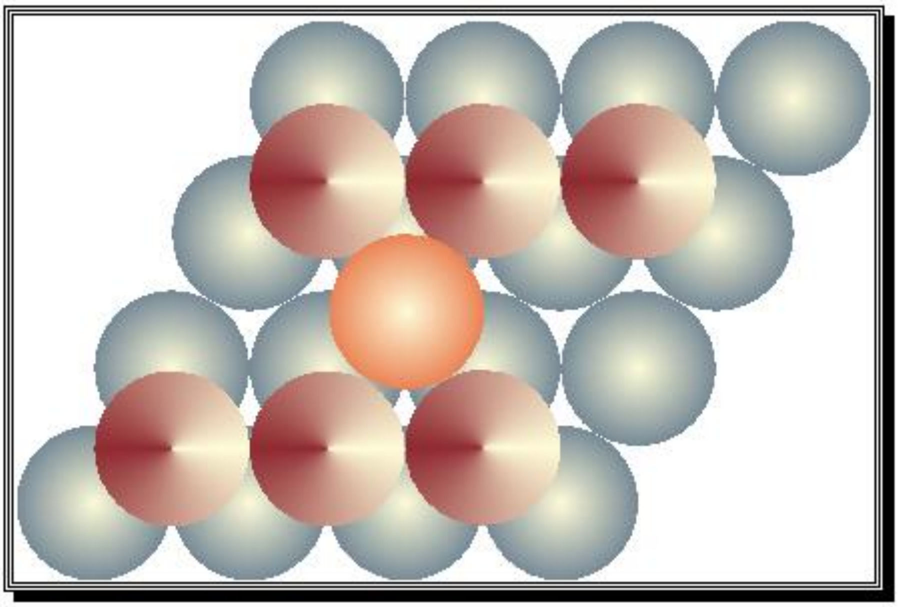
Peter Hammer   23. XI 23
chaosachso21@gmail.com

was passiert



wenn mehr als d r 

A L L E R L  **ma Thema tisieren**

Peter Hammer — chaosachso21@gmail.com

Armin Widmer — widmer.ar@bluewin.ch

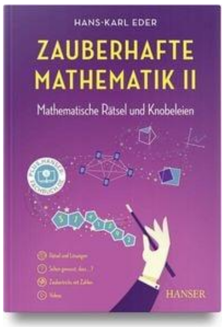
Felix Huber — felix.68@gmx.ch

Peter Hohler — phohler@yahoo.com

Rätsel des Monats 23 + 1 + 1 – 2 + 0 = 23

Elfer raus

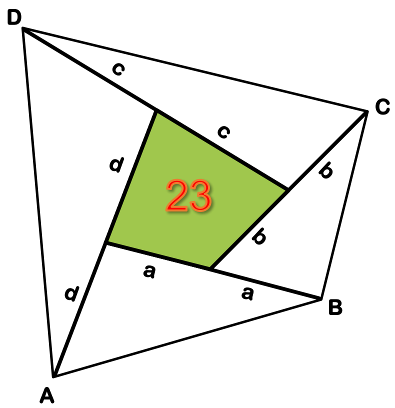
Idee Hans-Karl Eder , Hansheiri Huwiler und Peter Hammer

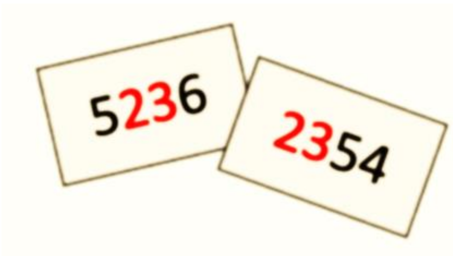


Die **Rede** ist von **Eder**, aber nicht von Meister **Eder**. Das heisst, die **Rede** ist vom Mathematiker und Philosophen **Hans-Karl Eder** (D), der nun wirklich ein Meister seines Fachs ist, wie sein neuestes Meisterwerk «**ZAUBERHAFTE MATHEMATIK II**» mathematisch einwandfrei beweist. https://www.hanskarleder.com

Präzis betrachtet, hat es aber in seinem «Zauberstab (gefüllt mit 56 spannenden Aufgaben) zwei sehr kleine Fehlerchen. Seine neuestes, zauberhaftes Buch erschien bereits am 13. anstatt erst am **23. Oktober**. Zudem finden wir sein hübsches, die **Zahl 23** verherrlichendes Rätsel auf Seite 29 (anstatt **23**), was uns natürlich nicht daran hindert, die **Zahl 23** im Zentrum der Fläche zu umrahmen.

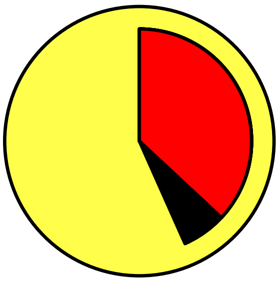
Frage **Bei einem Viereck mit dem Flächeninhalt 23 werden die vier Seiten verdoppelt (Skizze). Wir gross ist der Flächeninhalt ABCD ?**

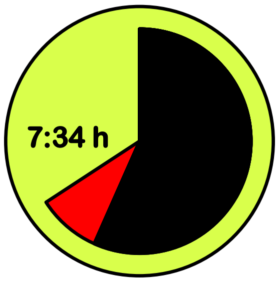




Speziell für uns hat **Hans-Karl Eder** freundlicherweise folgendes Problem «konstruiert», wobei das Thema «**Elfer raus**» insofern zentral ist, als schliesslich alles auch mengenmässig für uns passend sein soll ! Wie viele vierstellige Zahlen mit vier verschiedenen Ziffern (von 1 - 9) und folgenden beiden Eigenschaften gibt es ?

- Die **Zahl 23** muss vorne, in der Mitte oder hinten auftauchen.
- Die vierstellige Zahl muss durch **11 teilbar** sein.





Es ist höchste Zeit, dass wir einen Blick auf die Uhr werfen. Den Sekundenzeiger lassen wir stets ganz oben stehen und somit kümmern wir uns nur um den Minuten- und Stundenzeiger. Nach zwei Minuten hat der «sprintige» Minutenzeiger (mit 6° pro Minute) den gemächlichen Stundenzeiger (½° pro Minute) bereits um **11° Grad** distanziert. Deshalb listen wir die **Elfer-Reihe** 11°, 22°, 33°, … auf und ziehen bei 187° die Notbremse ! Warum ? Nun – nach 34 Minuten respektive zweimal 17 Minuten beträgt der Vorsprung des Minutenzeigers zwar 187°, aber der listige Stundenzeiger startet nicht um Mitternacht, sondern um 7 Uhr (210°) morgens. Dadurch beträgt sein Vorsprung schliesslich wunschgemäss präzis **23°** – und dies stellen wir somit fest, ohne einen Taschenrechner oder Rechenschieber zu konsultieren !

Frage **Um welche Zeit (nebst 7:34 h) spannen der Minuten- und Stundenzeiger ebenfalls einen Winkel von 23° auf ?**

Beim «**Elfer raus**» sieht der Mathematiker **Hansheiri Huwiler** nicht den Monat November als vielmehr eines seiner «**Dreibeine**» und packt drei 11-er Vektoren aus:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sqrt{9^2 + 6^2 + 2^2} = 11$$

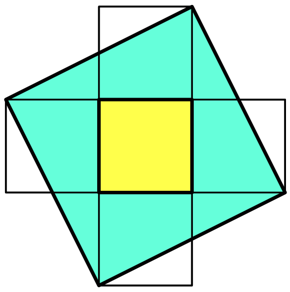
$$9 \cdot (-6) + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 0$$

Dreibein im
Museu de Arte Moderna
da Rio de Janeiro
Photo Felix Huber

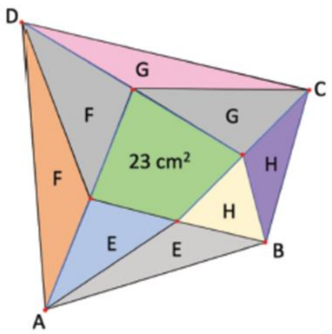
Die drei Vektoren mit der **Länge 11** – die Huwiler als «**Dreibein**» bezeichnet – bilden einen Würfel mit ganzzahligen Eck-Koordinaten, wie dies der Betrag und das Skalarprodukt andeuten.

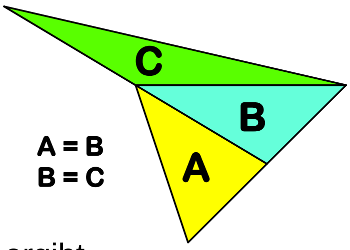
Frage **Analog zum 11-er Beispiel werden drei zueinander orthogonale Vektoren der Länge 23 gesucht, die einen Würfel aufspannen !**

Lösungen **Rätsel des Monats** **23 + 1 + 1 – 2 + 0 = 23**



Beim Quadrat wird die sofort klar, dass die beiden Quadrate ein Grössen-Verhältnis von 1:5 haben.
Ob sich die Seiten in die Breite oder Länge verziehen, ob sich eine Seite um 23° verdreht oder keine Seite der anderen ähnelt, es ist stets eine Verfünffachung im Spiel.
Da «**DRE**h**E**t» (darin versteckt sich ein Künstlername) sich doch alles nur noch um diese eine Frage: Warum hat Hans-Karl **EDER** bei seiner Figur ausgerechnet die **Zahl 23** ins Zentrum gesteckt ?





Mit der simplen Erkenntnis «Dreiecke mit gleicher Höhe und mit gleich grossen Grundlinien sind gleich gross» ergibt sich elegant die Lösung, weil jede Hälfte im Innern draussen zweimal doppelt vorkommt !

E + E + F + F + G + G + H + H + 23 = 115

Armin Widmer

Teilbarkeitsregel: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme null ergibt. Zum Beispiel stellen wir fest, dass die Zahl 5'236 durch 11 teilbar ist, weil 6 - 3 + 2 - 5 = 0 gilt.

Die gesuchten Zahlen sind von der Form **23**xy, x**23**y, oder xy**23**. Bei 23xy und bei xx23 haben wir durch 2-3 jeweils minus 1, bei x23x plus 1 bei der alternierenden Quersumme. Damit bei vierstelligen Zahl die alternierende Summe 0 wird, müssen sich die beiden verbleibenden Ziffern um 1 unterscheiden. Die Ziffer 1 fällt dabei weg, weil die 0 nicht vorkommen darf und die 2 durch 23 bereits vergeben ist. Es verbleiben somit nur die 5 Kombinationen (4,5), (5,6), (6,7), (7,8) und (8,9). Und somit haben wir leichtes Spiel, die 3x5 respektive **15 Varianten** aufzulisten: **2354 , 2365 , 2376 , 2387 , 2389 – 4235 , 5236 , 6237 , 7238 , 8239 – 5423 , 6523 , 7623 , 8723 , 9823**

Eine Alternative ist eine Multiplikations-Struktur zu erkennen:

214 x 11 , 215 x 11 , 216 x 11 , 217 x 11 , 218 x 11 – 385 x 11 , 476 x 11 , 567 x 11 , 658 x 11 , 749 x 11 – 493 x 11 , 593 x 11 , 693 x 11 , 793 x 11 , 893 x 11

11°	22°	33°	44°	55°	66°	77°	. . .	132°	**143°**	154°	165°	176°	**187°**
30°	30°	60°	30°		90°				**120°**				**210°**
19°	8°	27°	14°		24°				**23°**				**23°**

Mit der Feststellung, dass nach zwei Minuten der Unterschied zwischen dem Minuten- und Stundenzeiger 11° beträgt finden wir die Lösung, ein Delta von **23°**. Dies ist bei 143° – 120° = **23°** und bei 210° - 187° = **23°** der Fall.

Das heisst, wegen 17 x 11° = 187° erreichen wir nach 17 x 2 Minuten-Schritten das Ziel. Somit stellen wir den grossen Zeiger auf 34 Minuten und lassen den Stundenzeiger 7 Uhr starten. Analog finden wir nach 13 x 2 Minuten-Schritten die zweite Variante, wenn der Stundenzeiger um 4 Uhr startet.

Kontrolle 34 x 6° – (7 x 30° + 34 x 0.5°) = **23°** 26 x 6° – (4 x 30° + 26 x 0.5°) = **23°**

Phänomenal erscheint uns die Tatsache, dass die Summe **7:34 h** + **4:26 h** präzis einen halben Tag ergibt ! Ist dies ein Zufall ?

Die **Huwilerschen** «Dreibeine» haben wir absichtlich in alle Richtungen springen lassen, um allen einen genügend grossen Freiraum zur Verfügung zu stellen. Nunmehr lassen wir zum Beispiel das triviale Beispiel { (23,0,0) , (0,23,0) , (0,0,23) } durchfallen.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 9 & -6 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ 2 & 6 & 9 \end{matrix}$$

Länge 1 **Länge 3** **Länge 5** **Länge 7** **Länge 9** **Länge 11**

Die Liste schafft eher Klarheit, welcher «Vektor-Würfel» auf «drei Beinen» steht. Wir suchen drei zueinander orthogonale Vektoren mit der gleichen (ungeraden) Länge. Zudem dürfen keine Vielfachen vorkommen. Das heisst, wir dürfen nicht zum Beispiel bei der Varianten der Länge drei alle Komponenten verfünffachen.

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Länge 23

$$\begin{aligned} 18^2 + 14^2 + 3^2 &= 529 \qquad & 14 \cdot 3 + 3 \cdot 22 - 18 \cdot 6 &= 0 \\ 6^2 + 3^2 + 22^2 &= 529 \qquad & 18 \cdot 13 - 14 \cdot 18 + 3 \cdot 6 &= 0 \\ 13^2 + 18^2 + 6^2 &= 529 \qquad & 22 \cdot 6 - 6 \cdot 13 - 3 \cdot 18 &= 0 \end{aligned}$$

Zusatzfrage: Bei welchem «Dreibein», respektive bei welcher Länge der drei Vektoren sind erstmals alle 9 Komponenten verschiedene Zahlen ?