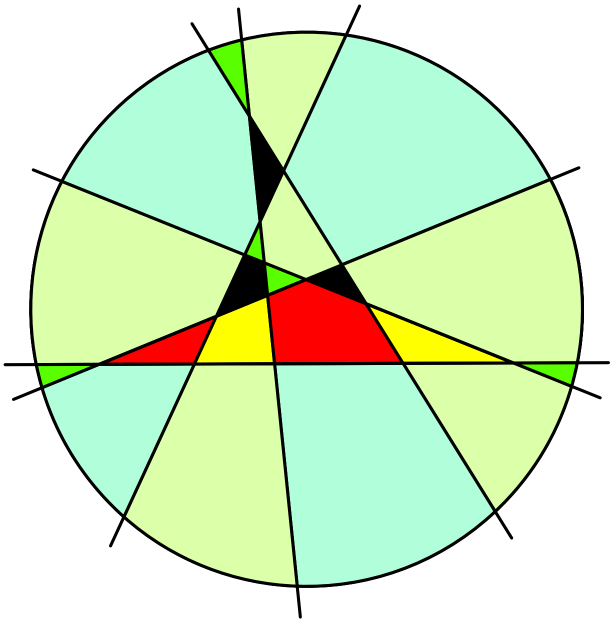
Peter Hammer 22. XI 22
hammer.ch@bluewin.ch

was passiert



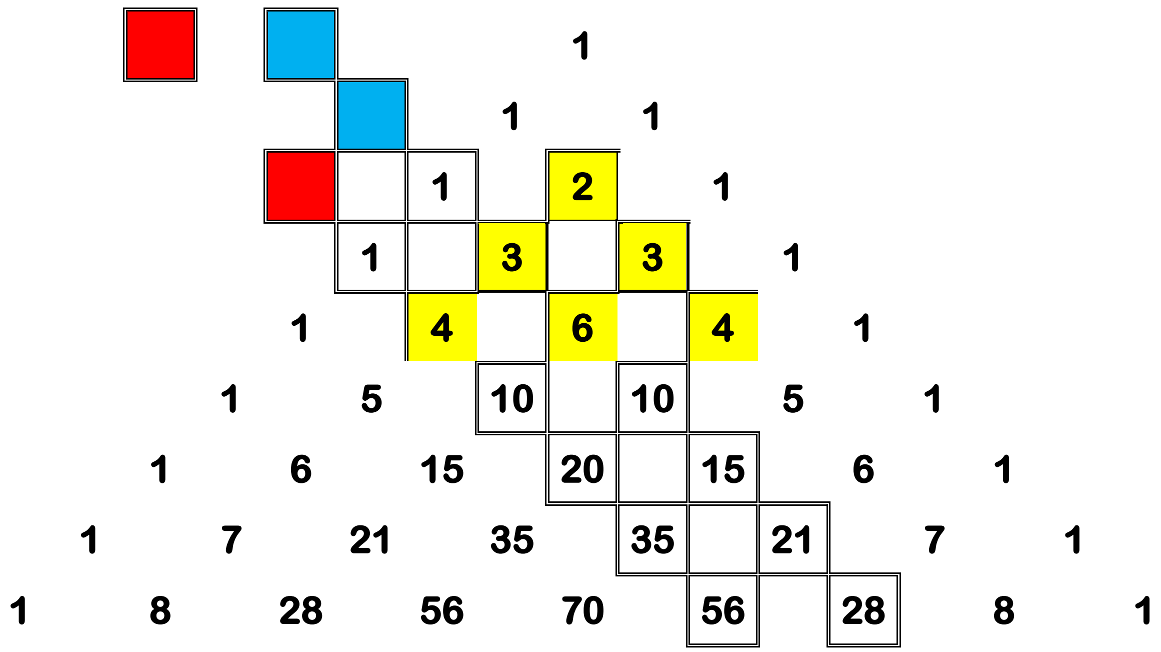
wenn mehr als zwei nur zwei Ziele verfolgen

Peter Hammer	hammer.ch@bluewin.ch
Armin Widmer	widmer.ar@bluewin.ch
Felix Huber	felix.68@gmx.ch

Rätsel des Monats $(2+2)\cdot 11 : 2 + 0 = 22$

22 ist (k)eine Quadratzahl

Idee **Felix Huber und Peter Hammer**

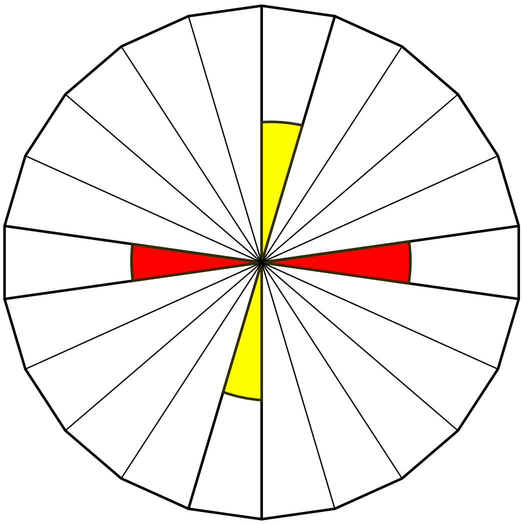
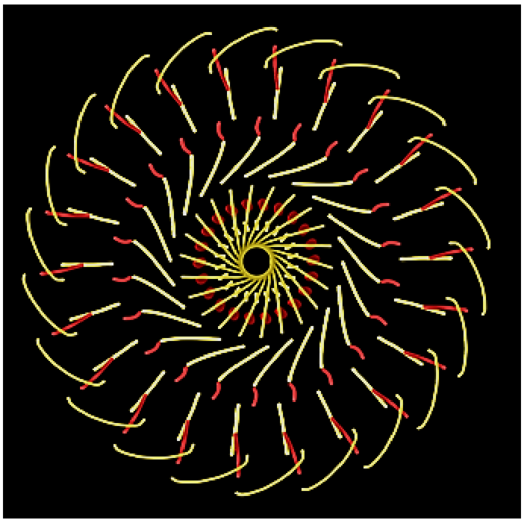


Darin sind wir uns wohl einig: «Wer findet, der sucht !» Im Pascalschen Dreieck ein weiteres Beispiel zu finden, das zur Jahreszahl **22** führt (Summe der gelben Felder), ist «just a funny clinch» ! Gleichermassen gestaltet sich die Suche von Quadratzahl-Mustern, da es doch einige, hübsch versteckte Varianten gibt.

In der «blauen» Diagonale wird «benachbart» addiert (1+3 = 4 , 3+6 = 9 , …). In der roten Diagonale wird «distanziert» subtrahiert (10 – 1 = 9 , 20 – 4 = 16 , …), um die Quadratzahlen herauszumeisseln. Das heisst, die Differenz zweier «lückenhaften» Nachbarn bildet stets eine Quadratzahl.

Werden die beiden «farbigen» Zahlenfolgen **1 – 3 – 6 – 10 – 15 – 21 – 28 – …** und **1 – 4 – 10 – 20 – 35 – 56 – …** horizontal aufgelistet, so werden in der blauen «Plus-Diagonale» und in der «roten Minus-Laufbahn» die Quadrate sofort ersichtlich.

Frage **Wie sind weitere Quadratzahlen-Muster im Pascalschen Dreieck versteckt ?**

https://apps.apple.com/ch/app/iornament-kunst-der-symmetrie/id534529876

Um die **22-er-Blume** (rechts) zu zeichnen, braucht es in der App «**iOrnament**» weniger als **22 Sekunden**. Innert **22 Sekunden** lassen sich auch die **22** Winkel im Zentrum eines regelmässigen **22-Ecks** (links) auf **22 Stellen** genau – aber bitte im Kopf – berechnen. So entsteht eine hübsche Verknüpfung zwischen der Zahl **22** und den Quadratzahlen. Zugleich drängt sich eine typische «felixanische» Frage auf.

Frage **Wie viele reguläre n-Ecke gibt es, die analog zum Achteck mit 45° im Zentrum einen Winkel mit einer natürlichen Zahl «ausweisen» ?**

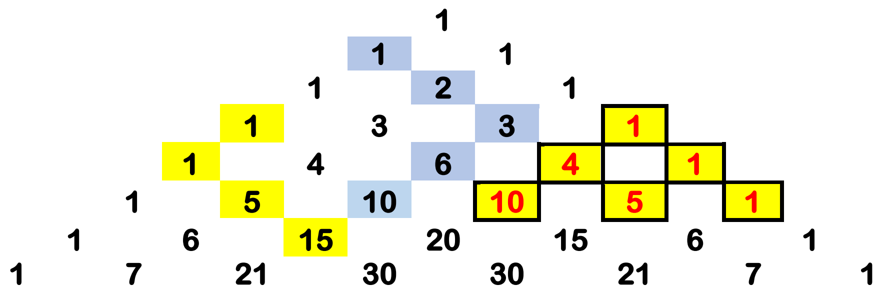
Eulers Vier-Quadrate-Identität ist bekannt: Das Produkt zweier Zahlen, von denen jede der beiden Zahlen aus einer Summe von vier Quadraten besteht, kann ebenfalls als Summe von vier Quadraten dargestellt werden. Im Jahr 1748 erwähnte Leonhard Euler (1707 – 1783) diese «quadratische Tugend» in einem Brief an Christian Goldbach (1690 – 1764). Betrachten wir als treffendes Beispiel die rein zufällig gewählten Zahlen **20** und **22**.

$3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 = 20 \qquad 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 22 \qquad 20 \cdot 22 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

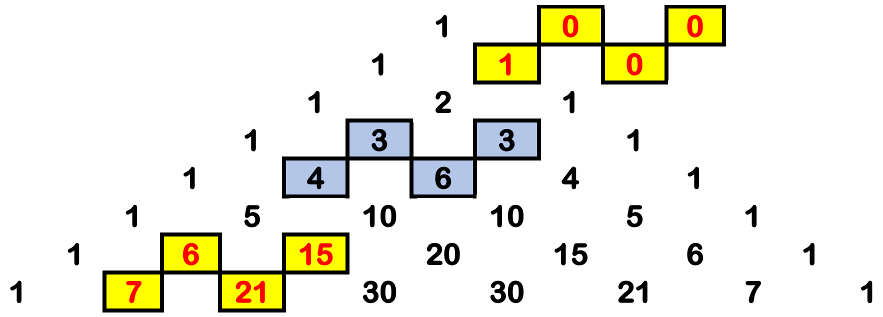
Frage **Zur Darstellung des Produktes 440 als Summe von vier Quadraten gibt es drei Varianten. Welche der drei Varianten führt bei einem «Querblick» direkt zur Zahl 22 ?**

Frage **Ebenfalls zu einer Quadratzahl führt die Summe der Faktoren : 22 = 1 x 22 = 2 x 11 ; 1 + 22 + 2 + 11 = 36. Ist dies einzigartig ?**

Lösungen **Rätsel des Monats** $(2+2)\cdot 11:2+0 = 22$



Offensichtlich versteht es auch die **Zahl 22** , sich im Pascalschen Dreieck symmetrisch einzunisten !

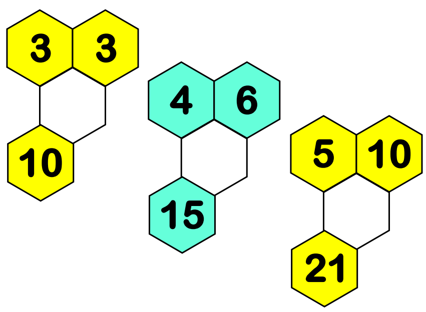


Schieben wir das Parallelogramm, das aus vier Zellen besteht, diagonal hinauf oder hinunter, so bildet die Summe der vier Zahlen stets eine quadratische Zahl.

0 + 0 + 1 + 0 = 1 , 0 + 1 + 2 + 1 = 4 , 1 + 2 + 3 + 3 = 9 , … , 15 + 6 + 7 + 21 = 49

Eine weitere «Schieber-Variante» basiert auf dem rechtwinkligen Dreieck.

3 + 3 + 10 = 16 , 4 + 6 + 15 = 25 , 5 + 10 + 21 = 36



$$\frac{360}{22} = \frac{180}{11} \quad 180 : 11 = 16 \text{ Rest } 4$$

$$4 : 11 = 0.36\ 36\ 36 \ldots \quad \frac{360}{22} = 16.\overline{36}$$

Insbesondere bei der Aufgabe der Anzahl (**22**) regulärer n-Ecke mit natürlichen Zahlen als Winkelgrössen realisieren wir einmal mehr, weshalb ein voller Kreis eine Vorliebe zur Teiler freudigen Zahl 360 hat. Und sehr zur Freude der **Zahl 22** existiert kein Ein-Eck und – dem Zweck sei gedient – kein Zw(ei)eck !

n-eck	Grad
3	120°
4	90°
5	72°
6	60°
8	45°

n-eck	Grad
9	40°
10	36°
12	30°
15	24°
18	20°

n-eck	Grad
120	3°
90	4°
72	5°
60	6°
45	8°

n-eck	Grad
40	9°
36	10°
30	12°
24	15°
20	18°

n-eck	Grad
180	2°
360	1°

Zur Darstellung des Produktes **20** mal **22** (440) als Summe von vier Quadraten gibt es drei Varianten. Bei der dritten Variante lässt sich die **Zahl 22** «herausstanzen».

$$2^2 + 6^2 + 12^2 + 16^2 = 20 \cdot 22 \qquad 4^2 + 6^2 + 8^2 + 18^2 = 20 \cdot 22$$

$$6^2 + 8^2 + 12^2 + 14^2 = 20 \cdot 22 \qquad 6 + 8 + 1 + 2 + 1 + 4 = 22$$

Die Frage nach Quadratzahlen bei der Summe der Teiler ist (absichtlich) nicht einmal präzis definiert. Steckt hinter der Zahl 9 die Summe 13 oder 16 ?

$$9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \rightarrow 1 + 9 + 3 + 3 = 16 \text{ , Teiler von 9: } 1, 3, 9 \rightarrow 1 + 3 + 9 = 13$$

Zum Thema «Summe der Teiler» lässt sich im Netz einiges finden, insbesondere auch Rechner. https://www.bveml.net/de/news/teilersummen-rechner.html
Zudem kann es nicht überraschen, dass beispielsweise die Quadratzahl 144 gleich von vier Zahlen (66, 70, 94 und 119) generiert wird.

Aus unsere Sicht steht aber 1'346 in Rampenlicht ! Warum ?