Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit vier Unbekannten

$$\left|\begin{array}{r} 6w - x + y = 12z - 5 \\ -2x - 8 = -6w + 8z - 2y \\ 2y = 4z - 3w + 5 \\ 3w \quad = 9 + 4z + x \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$$

Zuerst ordnen: $$\left|\begin{array}{l} 6w - x + y - 12z = -5 \\ 6w - 2x + 2y - 8z = 8 \\ 3w \quad + 2y - 4z = 5 \\ 3w - x \quad - 4z = 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$$

Man stellt zuerst ein 3-3-Gleichungssystem her (durch Elimination von x):

2*I – II: 12w – 6w -2x + 2x +2y – 2y - 24z + 8z = -10 - 8, also
6w - 16z = -18 bzw. nach Division durch 2: 3w - 8z = -9 (V)
I – IV: 6w – 3w – x + x + y – 12z + 4z = -5 – 9, also
3w + y – 8z = -14 (VI)

Das 3-3-Gleichungssystem lautet daher:

$$\left|\begin{array}{r} 3w + 2y - 4z = 5 \\ 3w \quad - 8z = -9 \\ 3w + y - 8z = -14 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{III} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array}$$

Man stellt nun ein 2-2-Gleichungssystem her (durch Elimination von y):

III – 2*VI: 3w – 6w + 2y – 2y – 4z +16z = 5 + 28, also
-3w + 12z = 33 (VII)

Das 2-2-Gleichungssystem lautet daher:

$$\left|\begin{array}{r} 3w - 8z = -9 \\ -3w + 12z = 33 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{V} \\ \text{VII} \end{array}$$

Elimination der Variablen w liefert die Lösung für z:
V + VII: 4z = 24, also **z = 6**
Einsetzen von z in Gleichung V ergibt Lösung für w: 3w = 48 – 9 = 39, also **w = 13**
Einsetzen von z und w in Gleichung VI ergibt Lösung für y:
y = -3*13 + 8*6 - 14 = -5, also **y = -5**
Einsetzen von z und w in Gleichung IV ergibt Lösung für x:
x = 3*13 - 4*6 - 9 = -5, also **x = 6**

Also ist die Lösungsmenge **L = {(13, 6, -5, 6)}**

Derartige Gleichungssysteme löst man systematischer (mit dem Computer) mit dem Gauss-Verfahren.