5. Erläuterungen zur Menge ℝ der reellen Zahlen ("Vollständigkeit")

Die **Menge ℝ** ist die Vereinigungsmenge der *rationalen* und der irrationalen Zahlenmengen, d. h. Vereinigungsmenge aller *abbrechenden, periodischen* und unendlich, unperiodischen Dezimalbrüche.

Jede Intervallschachtelung definiert genau eine reelle Zahl. (Axiom).

Bilder der reellen Zahlen (auf dem Zahlenstrahl)
Bild einer rationalen Zahl: rationaler Punkt. Bild einer reellen Zahl: reeller Punkt.

Von früher: Obwohl zwischen zwei beliebigen (verschiedenen) rationalen Punkten unendlich viele rationale Punkte liegen, so gibt es dazwischen auch Punkte, die nicht Bild einer rationalen Zahl sein können.

Beispiel: Zwischen 1 und 2 liegen unendlich viele rationale Zahlen, nämlich etwa alle x der Form $x = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (vgl. Bemerkung 1))
Es ist aber auch $\sqrt{2}$ in [1,2], aber $\sqrt{2}$ ist kein Element aus $\mathbb{Q}$.

Für die reellen Zahlen gilt nun:

Die reelle Zahlenmenge ist **vollständig**, d.h. die Bilder der reellen Zahlen bedecken die Zahlengerade **lückenlos**, d.h. jeder beliebige Punkt auf der Zahlgeraden ist ein reeller Punkt, erscheint also als Resultat einer Intervallschachtelung.

Beweis: Sei P ein beliebiger Punkt auf dem positiven Zahlenstrahl. (für negative Zahlen verläuft der Beweis analog). Auf dem Strahl seien die Ganzen, Zehntel, Hundertstel usw. markiert.
Wählt man nun nacheinander dasjenige Ganze, Zehntel, Hundertstel usw. aus, das unmittelbar links neben P steht, so entsteht ein zu P gehörender, unendlicher Dezimalbruch. (z.B. 0.999... = 1, vgl. Bemerkung 2)).
Falls P nicht ein rationaler Punkt ist, so entsteht ein unendlicher, unperiodischer Dezimalbruch. Aus ihm lässt sich eine Intervallschachtelung bilden. Sie definiert genau eine irrationale Zahl, deren Bild P ist.

Bemerkungen:
1) $\{x \mid x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n>1\} = \{1.5, 1.333..., 1.25...\}$

2) Intervallschachtelung (I_n) für die Zahl 1: $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [0.9,1]$, $I_3 = [0.99,1]$, ...
Es gilt für alle n:
- I_n ist abgeschlossen.
- I_{n+1} ist Teilmenge von I_n.
- Intervall-Länge von I_n geht gegen 0 für n geht gegen ∞.