STEREOMETRIE

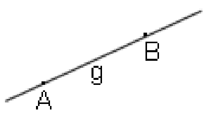
I Grundlagen

1. Punkte, Geraden und Ebenen

Der dreidimensionale Raum wird als unendliche Punktmenge aufgefasst. Geraden und Ebenen sind dann Teilmengen dieser Punktmenge.

a) Gerade

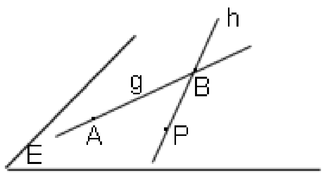
Axiom: Eine **Gerade** g ist eindeutig durch zwei ihrer Punkte bestimmt.



Gerade g = (A B), $A \in g$, $B \in g$
Eine Gerade ist unbegrenzt
Im Gegensatz dazu ist die Strecke AB begrenzt; sie hat Anfangs- und Endpunkt.

b) Ebene

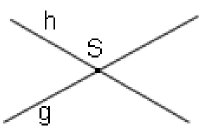
Axiom: Eine **Ebene** E ist eindeutig durch drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte bestimmt.



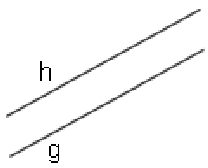
Ebene E = (ABP)
Eine Ebene ist also auch durch zwei sich schneidende Geraden g und h oder durch eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$ bestimmt:
E = (g, h) = (P, g)

c) Gegenseitige Lage zweier Geraden

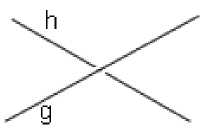
1) g und h **schneiden** sich in einem Punkt: $g \cap h = \{S\}$



2) g ist **parallel** zu h: $g \parallel h \leftrightarrow$
$g = h$ oder Ebene E=(g, h) mit $g \cap h = \emptyset$



3) g ist **windschief** zu h $\leftrightarrow$ $g \cap h = \emptyset$ und $g \nparallel h$



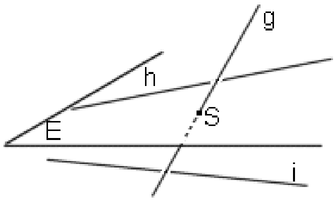
Beispiele: Niederberger, Geometrie 3, p. 81

d) Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

1) Durchstosspunkt S von g und E: $g \cap E = \{S\}$

2) h liegt in E, d.h. $h \subset E$ bzw. $h \cap E = h$
(h ist dann auch parallel zu E)

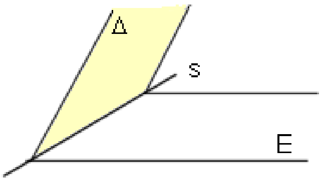
3) i ist parallel zu E, aber $i \not\subset E$: $i \cap E = \varnothing$



Beispiele: Niederberger, Geometrie 3, p. 81

e) Gegenseitige Lage von Ebenen

1) Schnittgerade s: $E \cap \Delta = s$



2) $E = \Delta$, d.h. $\Delta \subset E$ bzw. $E \cap \Delta = E$
(Δ ist dann auch parallel zu E)

3) E ist parallel zu Δ, aber $E \cap \Delta = \varnothing$

Aufgabe: Niederberger, Geometrie 3, p. 82

f) Darstellung im räumlichen kartesischen Koordinatensystem

x-Achse nach vorne, y-Achse nach rechts, z-Achse nach oben, paarweise senkrecht

Punkt P hat Koordinaten x, y und z: P(x/y/z)

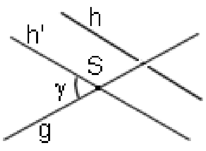
Beispiele: P(2/3/4) P liegt vorne, rechts und oben
Q(-2/3/-4) Q liegt hinten, rechts und unten

Aufgabe 2: Niederberger, Geometrie 3, p. 84

2. Winkel zwischen Geraden und Ebenen, Normalen und Normalebenen

a) Winkel γ zwischen zwei Geraden ($0° \leq \gamma \leq 90°$)

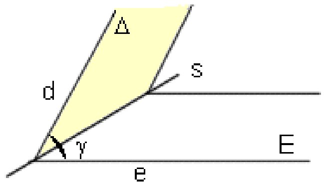
- für zwei sich schneidende Geraden: $\gamma = \angle(g,h')$
- für parallele Geraden: $\gamma = \angle(h,h') = 0°$
- für windschiefe Geraden g und h: h' so, dass $h' \parallel h$ und $g \cap h' = \{S\}$
  $\gamma = \angle(g,h) := \angle(g,h')$



b) Winkel γ zwischen zwei Ebenen ($0° \leq \gamma \leq 90°$)

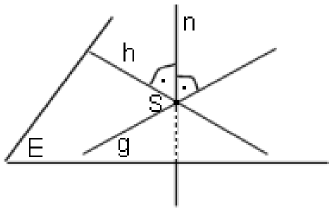
- falls $E \cap \Delta = \varnothing$ oder $E = \Delta$, d.h. falls $E \parallel \Delta$:
  $\gamma = \angle(E, \Delta) = 0°$

- falls $E \cap \Delta = s$ (s: Schnittgerade):
  $e \subset E$, $e \perp s$, $d \subset \Delta$, $d \perp s$, $\gamma = \angle(E, \Delta) = \angle(e, d)$



c) Normale n auf eine Ebene E

Definition: Eine Gerade n ist **Normale** einer Ebene E
($n \perp E$), wenn sie senkrecht auf zwei Geraden von E steht.
$E = (g,h)$, $n \perp g$, $n \perp h \;\rightarrow\; n \perp E$



Folgerungen:
1. n steht dann senkrecht auf **allen** Geraden von E.
2. Durch einen gegebenen Punkt P gibt es nur **eine** Normale n zur Ebene E ($P \in n$).

d) Normalebene N zu (bzw. von) einer Geraden g

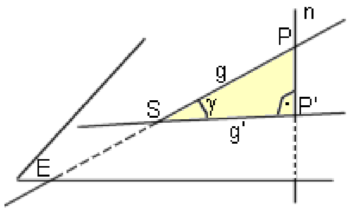
Definition: Ist eine Gerade g Normale der Ebene N, so heisst N **Normalebene** zu g.

Folgerung: Durch einen Punkt P gibt es nur eine Normalebene N zu g ($P \in N$).

Beispiel: In der Figur bei c) ist also E Normalebene von n.

e) Winkel γ zwischen Gerade g und Ebene E ($0° \leq \gamma \leq 90°$)

- Ist $g \parallel E$, so ist $\gamma = \angle(g, E) = 0°$
- Sei nun $g \cap E = \{S\}$:
  Fälle von $P \in g$ ($P \neq S$) die Normale n auf E.
  $n \cap E = \{P'\}$ P': Projektion von P auf E
  $g' := (SP')$ g': Projektion von g auf E
  $\gamma = \angle(g, E) := \angle(g, g')$



Spezialfall: Ist $g \perp E$ (g also Normale von E), so ist g' = S und $\angle(g, E) = 90°$.

f) Normalebene N zu einer Ebene E

Definition: Eine Ebene N heisst **Normalebene** zu E, falls sie eine Gerade enthält, die Normale von E ist. Es ist dann $N \perp E$.

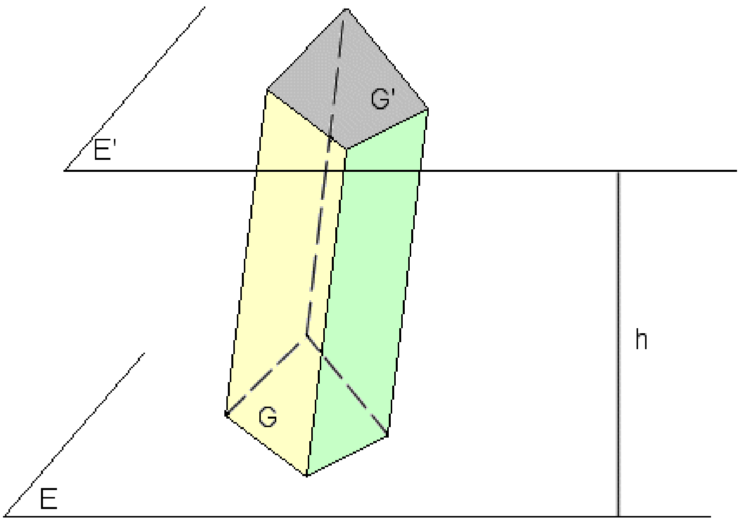
Folgerung: Durch einen Punkt P gibt es unendlich viele Normalebenen zu einer Ebene E.

Beispiel: Die Ebene N:=(g,g') bei e) ist **Normalebene** zur Ebene E.

II Das Prisma

1. Definitionen

Definition: Ein **Prisma** ist ein Körper, dessen Grundflächen G und G' (G' heisst auch etwa Deckfläche) kongruente Vielecke und dessen Seitenflächen Parallelogramme sind.
Ein Prisma heisst **gerade**, wenn die Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen (sonst heisst es **schief**). Ein gerades Prisma heisst **regulär**, wenn seine Grundflächen regelmässige Vielecke sind.
Die **Mantelfläche** (kurz: der 'Mantel') ist die Vereinigungsmenge der Seitenflächen. Die **Oberfläche** ist die Vereinigungsmenge der Mantelfläche mit den Grundflächen.



$E' \parallel E$, $G' \simeq G$

$G' \subset E'$

$G \subset E$

Der Abstand h der beiden Parallelebenen E und E' heisst **Höhe** des Prismas.
Die Länge einer Seitenkante ist also genau dann Höhe, wenn das Prisma gerade ist.

Definition: Ein **Parallelflach** (oder Spat) ist ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind.

Definition: Ein **Quader** ist ein gerades Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind.
Ein **Würfel** ist ein Quader mit gleich langen Kanten.

2. Berechnungen am Quader (Kantenlängen a, b und c)

Schrägbild Quader:

Flächendiagonale d_1: $d_1^2 = a^2 + b^2$

Körperdiagonale d: $d^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\underline{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Alle 4 Körperdiagonalen sind gleich lang.

Oberflächeninhalt S: $\underline{S = 2(ab + ac + bc)}$

Spezieller Quader: Würfel: $a = b = c$

Würfeldiagonale $\underline{d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}}$

Oberflächeninhalt $\underline{S = 6a^2}$

3. Volumen des Prismas

a) Einleitung zur Volumenmessung

Durch bestimmte Axiome kann man eine Funktion definieren, die 'jedem' Körper eine Masszahl zuordnet (Volumenfunktion).
Wir beschränken uns darauf, einen Körper mit dem Volumeneinheitskörper (Würfel mit Kantenlänge 1) zu vergleichen.

Prinzip 1: "Zerschneidungsprinzip"
Kann man zwei Körper aus paarweise kongruenten Teilkörpern zusammensetzen, so haben sie das gleiche Volumen.

b) Volumen des Quaders

Aus Prinzip 1 folgt zuerst für Seitenlängen a,b und c aus $\mathbb{N}$, dann aus $\mathbb{Q}^+$, dann aus $\mathbb{R}^+$:

Satz: Das Volumen V eines Quaders mit Seitenlängen a, b und c ist $V = a \cdot b \cdot c$

c) Volumen des Prismas

Fall 1: Gerades dreiseitiges Prisma

Aus Prinzip 1 folgt für gerade Prismen mit gleicher Höhe h: Sind die Grundflächen zerlegungsgleich, so sind die Prismen volumengleich (Zerlegung mit Normalebenen zur Grundfläche in gerade Teilprismen)

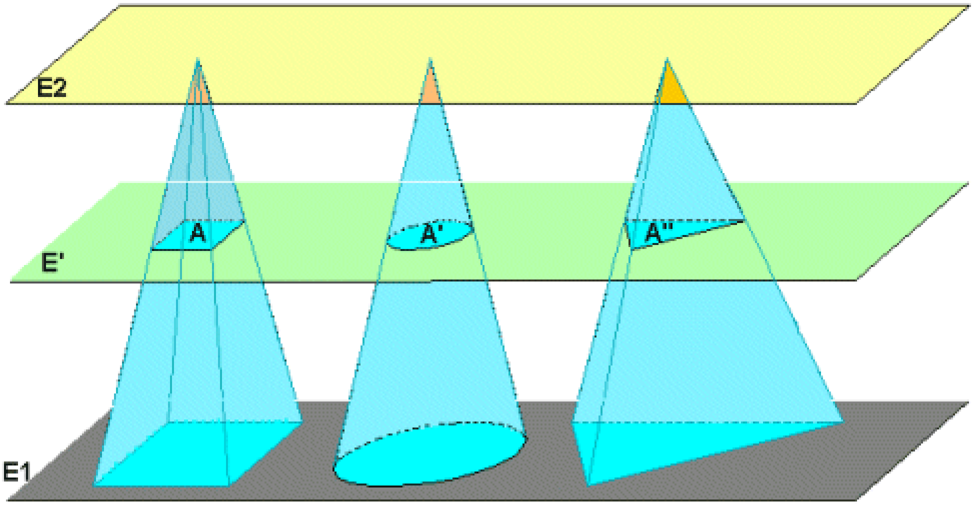
Ein Dreieck mit Seitenlänge a und Höhe h_a ist zerlegungsgleich einem Rechteck mit Seitenlänge a und Höhe $0.5h_a$
Volumen $\underline{V_{Prisma}} = V_{Quader} = a \cdot 0.5h_a \cdot h := \underline{G \cdot h}$ mit G: Inhalt der Grundfläche

Fall 2: Gerades n-seitiges Prisma
Die Grundfläche (n-Eck, Inhalt G) wird in n Dreiecke (Inhalte $G_1, G_2, \ldots G_n$) zerlegt und das Prisma damit in n dreiseitige gerade Prismen $P_1, P_2, \ldots P_n$.

$\underline{V_{Prisma}} = V_{P1} + V_{P2} + \ldots + V_{Pn} = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + \ldots + G_n \cdot h = h\,(G_1 + G_2 + \ldots + G_n) =$
$\underline{V_{Prisma}} = \underline{G \cdot h}$

Fall 3: schiefes Prisma

Prinzip 2: "Prinzip von Cavalieri"
Schrägbild: Drei Körper K, K' und K" mit gleicher Höhe h



Inhalt A = A' = A" für alle Ebenen E' zwischen E1 und E2

Dann gilt: Die Körper K, K' (und K") haben dann das gleiche Volumen:
Liegen zwei Körper zwischen parallelen Ebenen E_1 und E_2 und werden sie von **jeder** zu E_1 und E_2 parallelen Ebene E' so geschnitten, dass **inhaltsgleiche** Schnittflächen entstehen, so sind die Körper **volumengleich**.

(ohne Beweis)

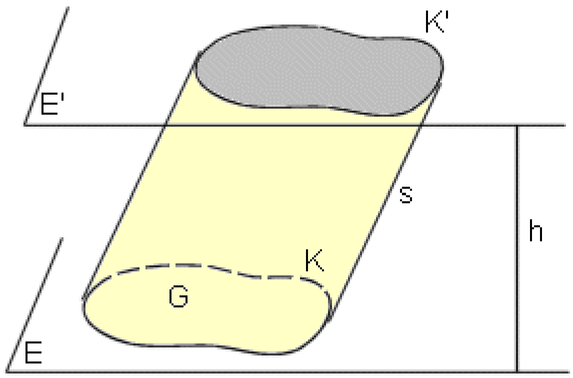
Satz: Jedes schiefe Prisma ist volumengleich zu einem geraden Prisma mit inhaltsgleicher Grundfläche (Inhalt G) und gleicher Höhe h:

Volumen $V = G \cdot h$

III Der Zylinder

1. Definitionen

Definition: Verschiebt man eine ebene, geschlossene Kurve K räumlich, so überstreicht die von der Kurve umschlossene Fläche einen **Zylinder**. Die Kurve K selber überstreicht bei der Verschiebung den **Mantel** des Zylinders. Die Punkte von K durchlaufen **Mantellinien** der Länge s. Erfolgt die Verschiebung senkrecht zur Ebene E ($K \subset E$), so heisst der Zylinder **gerade** (sonst schief).



$E' \parallel E$, $K' \simeq K$

$K' \subset E'$

$K \subset E$

Der Abstand h der beiden Parallelebenen E und E' heisst **Höhe** des Zylinders.
Die Länge einer Mantellinie ist also genau dann Höhe, wenn der Zylinder gerade ist.

Definition: Ist K eine Kreislinie, so heisst der Zylinder **Kreiszylinder**. Die Verbindungsstrecke MM' der beiden Mittelpunkte von K und K' heisst **Achse** des Zylinders. Ein **Achsenschnitt** ist ein ebener Schnitt durch den Zylinder, der die Achse enthält. Ein gerader Kreiszylinder heisst **gleichseitig**, wenn der Durchmesser von K gleich h ist (der Achsenschnitt ist dann ein Quadrat).

2. Mantelinhalt und Oberflächeninhalt des geraden Kreiszylinders

Der Mantel eines geraden Kreiszylinders (Grundkreisradius r, Höhe h) lässt sich in eine Ebene abwickeln:

Es entsteht ein Rechteck mit Breite 2π r und Höhe h.

Mantelflächeninhalt **$M = 2\pi r h$**

Oberflächeninhalt $\underline{\mathbf{S}} = 2\pi r h + 2 r^2 \pi = \underline{\mathbf{2 \pi r (r + h)}}$

Bemerkung: Für den Mantelinhalt des schiefen Kreiszylinders gibt es keine einfache Formel.

3. Volumen des Zylinders

Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt:

Jeder Zylinder mit Grundflächeninhalt G und Höhe h ist volumengleich zu einem Prisma mit Grundflächeninhalt G und gleicher Höhe h, hat also das Volumen

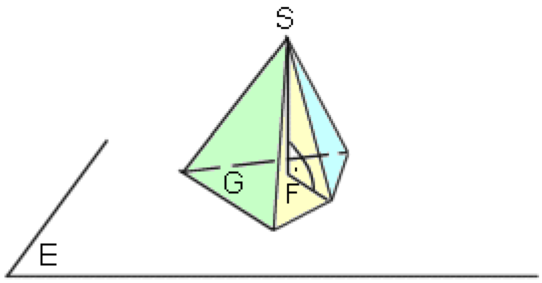
$$\boxed{\mathbf{V = G \cdot h}}$$

Speziell: Das Volumen des Kreiszylinders mit Grundkreisradius r und Höhe h ist also
$V = r^2 \pi h$

IV Die Pyramide

1. Definitionen

Definition: Verbindet man die Punkte der Fläche G eines ebenen n-Ecks geradlinig mit einem Punkt S ausserhalb der Ebene E ($G \subset E$), so entsteht eine **n-seitige Pyramide**. S heisst **Spitze**, G **Grundfläche** und die Verbindungsstrecken von S mit den Ecken des n-Ecks **Seitenkanten** der Pyramide. Die **Mantelfläche** ist die Vereinigungsmenge der Seitenflächen. Der Abstand S zur Ebene E heisst **Höhe** h der Pyramide.



Höhe h = $\overline{FS}$; F: Fusspunkt der Höhe
(Normale n zu E durch S, $\{F\} = n \cap E$)

$G \subset E$, $S \notin E$

Definition: Eine Pyramide heisst **regulär**, wenn G ein **regelmässiges** n-Eck ist und S senkrecht über dem Mittelpunkt des n-Ecks liegt (F = M).

Beispiele: Reguläre quadratische Pyramide
Reguläres Tetraeder (hier sind sogar auch noch die Seitenflächen kongruent zur Grundfläche G).

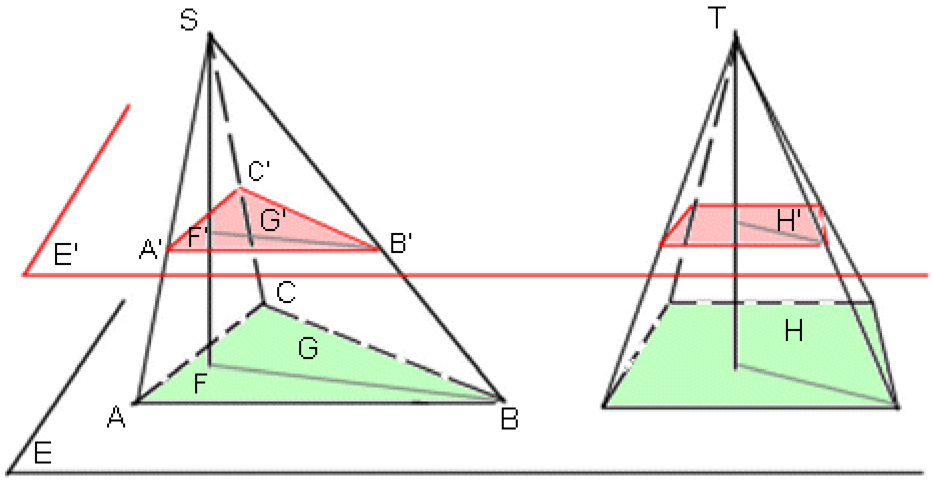
2. Mantel- und Oberflächeninhalt der Pyramide

Sie berechnen sich aus der Summe der entsprechenden Teilflächeninhalte. Dabei ist zur Berechnung wichtiger Grössen (z.B. die Höhe einer Seitenfläche h_S) die Pyramide mit einer Ebene sinnvoll zu schneiden:

Beispiel: Gerade, quadratische Pyramide (= reguläre, vierseitige Pyramide)
Gegeben: Grundkante a und Höhe h
Gesucht: a) Seitenkante s b) Mantelinhalt M

3. Das Volumen der Pyramide

Hilfssatz 1: Liegen die **inhaltsgleichen** Grundflächen G und H zweier Pyramiden mit **gleicher Höhe** h in der gleichen Ebene E, so schneidet jede Parallelebene E' zu E die Pyramiden in inhaltsgleichen Figuren G' und H'.



Beweis: E' ∥ E im Abstand h' von S ($h' = \overline{SF'}$), Höhen h der Pyramiden, G = H

Δ A'B'C' ist ähnlich zu Δ ABC, denn entsprechende Seiten sind parallel und entsprechende Winkel sind gleich. Also sind entsprechende Seiten proportional, d.h.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{B'S}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{F'S}} = \frac{h}{h'} := \text{Ähnlichkeitsfaktor } k$$

Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie der Ähnlichkeitsfaktor k im Quadrat, also gilt:

$$\frac{G}{G'} = \frac{h^2}{(h')^2} = \frac{H}{H'}$$ Da G = H, so gilt auch G' = H'

Mit Hilfssatz 1 sind die Voraussetzungen des Cavalieri-Prinzips erfüllt. Also gilt:

Hilfssatz 2: Pyramiden mit inhaltsgleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h haben das gleiche Volumen.

Aber wie gross ist dieses Volumen?

Vermutung: Ein Würfel mit Kantenlänge a lässt sich in sechs volumengleiche Pyramiden mit Grundfläche $G = a^2$ und Spitze im Würfelmittelpunkt zerlegen. Die Höhe h jeder solchen Pyramide ist also 0.5h. Es gilt daher:

$$a^3 = 6\cdot\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a}{2} = 6\cdot\frac{1}{3}G\cdot h$$

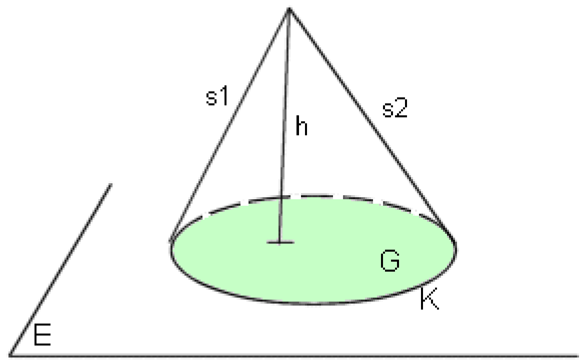
> Satz: Die Pyramide mit Grundflächeninhalt G und der Höhe h hat das Volumen
> $$V = \frac{1}{3}G\cdot h$$

Beweis: Nach Hilfssatz 2 existiert zu einer beliebigen Pyramide mit G und h eine volumengleiche dreiseitige mit G und h. Zu dieser dreiseitigen existiert wiederum nach Hilfssatz 2 eine volumengleiche Pyramide P_1 mit kongruenter Grundfläche G und gleicher Höhe h, bei der eine Seitenkante senkrecht zur Grundfläche steht.
Ergänzt man diese Pyramide P_1 zu einem geraden Prisma, so kann dieses in drei volumengleiche Pyramiden P_1, P_2 und P_3 zerlegt werden. (s. Modell!)
Also gilt der Satz.

V Der Kegel

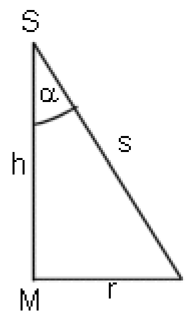
1. Definitionen

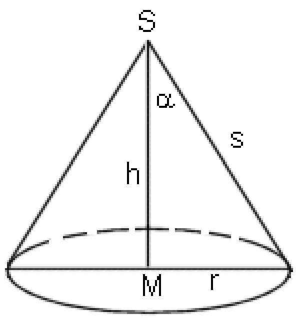
Definition: Verbindet man alle Punkte einer ebenen Fläche G, die von einer Kurve K umschlossen wird, geradlinig mit einem Punkt S ausserhalb der Ebene E ($G \subset E$), so entsteht ein **Kegel**. S heisst **Spitze**, G **Grundfläche** und die Verbindungsstrecken von S mit den Punkten auf K **Mantellinien** des Kegels. Weitere Definitionen wie Höhe, **Mantel(fläche) und Oberfläche** wie üblich.



Definition: Ein Kegel heisst **Kreiskegel**, falls die Kurve K eine Kreislinie ist. Ein Kreiskegel ist **gerade**, falls die Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt der Kreislinie steht (sonst heisst er schief).

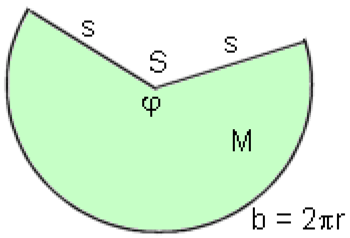
Bemerkung: Ein gerader Kreiskegel kann durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete erzeugt werden:





2. Mantel- und Oberflächeninhalt des geraden Kreiskegels

Schneidet man den Mantel eines geraden Kreiskegels längs einer Mantellinie s auf und wickelt ihn in eine Ebene ab, so entsteht ein Kreissektor:



Teil des 'Netzes' eines Kegels; Netzwinkel φ
Mantellinie s

Kreislehre: $b = 2\pi r = \frac{2\pi s}{360°} \cdot \varphi$, $\varphi = 360° \, \frac{r}{s}$

Mantelinhalt $\underline{M} = \frac{b \cdot s}{2} = \frac{2\pi r s}{2} = \underline{\pi r s}$

Oberflächeninhalt $\underline{S} = r^2\pi + \pi rs = \underline{\pi r\,(r + s)}$

Bemerkung: Für den Mantel des schiefen Kreiskegels existiert keine einfache Formel.

3. Volumen des Kegels

Satz: Das Volumen eines Kegels mit Grundflächeninhalt G und Höhe h ist

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Speziell für den Kreiskegel mit Grundkreisradius r und Höhe h: $\mathbf{V = \frac{1}{3} r^2 \pi\, h}$

Beweis: Analog wie bei der Pyramide

VI Pyramiden- und Kegelstumpf

Definition und Volumen

Definition: Schneidet man eine Pyramide (einen Kegel) mit einer Parallelebene zur Grundfläche, so erhält man einen **Pyramidenstumpf** (**Kegelstumpf**) und eine Ergänzungspyramide (bzw. Ergänzungskegel).

Für Bezeichnungen und Berechnungen: s. später in der Formelsammlung.

Hier soll nur die Formel für das Volumen eines Pyramiden- bzw. Kegelstumpfes der Höhe h, Grundflächeinhalt und Deckflächeninhalt D angegeben werden:

$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3} h \,(G + \sqrt{G \cdot D} + D)$$

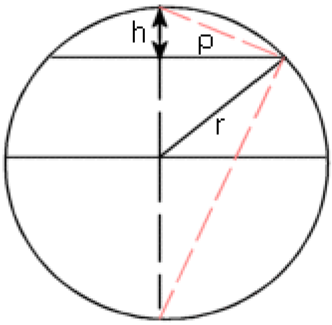
VII Kugel- und Kugelteile

1. Definitionen

Definition: Die **Kugel(ober)fläche** ist die Menge aller Raumpunkte, die von einem festen Punkt M die Entfernung $r > 0$ haben.

Definition: Die **Kugel** ist die Menge aller Raumpunkte, die von einem festen Punkt M höchstens die Entfernung $r > 0$ haben.

Jede durch eine Kugel gelegte Ebene E schneidet aus der Kugelfläche einen Kreis, einen sog. **Grosskreis**, falls $M \in E$, sonst einen **Kleinkreis**.



Schnitt:

r: Kugelradius und Radius eines Grosskreises
ρ: Radius Kleinkreis
Höhe h: s. Figur

$\rho^2 = h\,(2r - h)$ nach Höhensatz
$\rho^2 = 2rh - h^2$
$\underline{\rho^2 + h^2 = 2rh}$

Zur Definition und den Berechnungsformeln von Kugelteilen: s. später Formelsammlung

Teile der Kugelfläche: Haube (Kappe) und Zone
Teile der Kugel: Sektor, Schicht und Abschnitt (Segment)

2. Volumen der Kugel

Man betrachtet zwei Körper derselben Höhe $h = r$ zwischen zwei Parallelebenen E_1 und E_2:

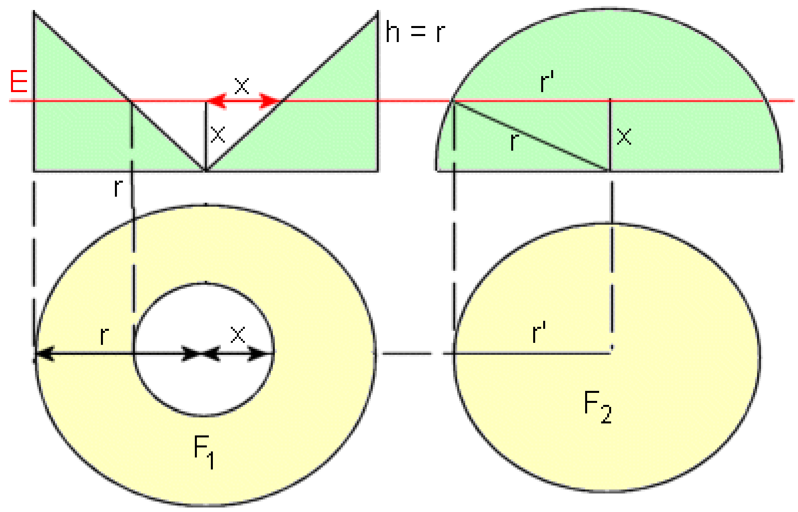
1. Körper = Restkörper K_1 = Zylinder ohne Kegel (Radius $r = h$)
2. Körper = Halbkugel K_2 mit Radius r

Die beiden Körper werden nun von einer dritten Ebene $E \,//\, E_1$ im Abstand x von E geschnitten (s. Figur auf der nächsten Seite)

Die Ebene E schneidet aus K_1 eine Kreisringfläche F_1 aus, aus der Halbkugel wird eine Kreisfläche F_2 mit Radius r' ausgeschnitten.

Riss:

Schnittflächen:



Behauptung: Für beliebige x gilt $F_1 = F_2$

In der Tat: $F_1 = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$ $\qquad F_2 = r'^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$

Nach dem Satz von Cavalieri haben also beide Körper das gleiche Volumen.

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel} = r^2\pi h - \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{2}{3}r^2\pi h = \frac{2}{3}r^3\pi \quad (\text{da } r = h)$$

Es gilt also:

Satz: Das Volumen V einer Kugel mit Radius r beträgt

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

3. Oberflächeninhalt der Kugel

Satz: Der Oberflächeninhalt S einer Kugel mit Radius r beträgt

$$\mathbf{S = 4\pi r^2}$$

Beweisidee: Die Kugel wird zerlegt in n 'pyramidenähnliche' Teilkörper $P_1, P_2, \dots P_n$ mit einem Teil der Kugeloberfläche als Grundfläche ($G_1, G_2, \dots G_n$) und der Spitze im Kugelzentrum M. Die 'Pyramiden' haben also dann die Höhe h = r.

$$V_{Kugel} = \text{Volumen}(P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = \frac{r}{3}S = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Also ist $S = 4\pi r^2$