Aufgabe 2:

Diskutiere die Funktion mit Gleichung $y = f(x) = \dfrac{4x^3 + x^2 - x - 4}{x^2 - 4}$

$y' = \dfrac{4x^4 - 47x^2 + 4}{(x^2-4)^2}$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{30x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $\qquad$ b) Keine einfache Symmetrie ersichtlich, aber siehe c)

c) Asymptoten: $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ sind Polstellen ($\rightarrow$ vertikalen Asymptoten)

Verhalten: $f(x) \rightarrow \infty$ $(x \rightarrow -2$ und $x>-2)$
$f(x) \rightarrow -\infty$ $(x \rightarrow -2$ und $x<-2)$

$f(x) \rightarrow \infty$ $(x \rightarrow 2$ und $x>2)$
$f(x) \rightarrow -\infty$ $(x \rightarrow 2$ und $x<2)$

Polynomdivision für schiefe Asymptote:

$(4x^3 + x^2 - x - 4) : (x^2 - 4) = 4x + 1 + \dfrac{15x}{x^2-4}$

g: $y = 4x + 1$ ist Gleichung der schiefen Asymptote

Zusätzlich folgt: G_f ist symmetrisch zum Punkt (0/1), denn G_h mit Gleichung
$y = h(x) = 4x + \dfrac{15x}{x^2-4}$ wäre wegen $h(-x) = -h(x)$ punktsymmetrisch zu (0/0).

d) Nullstellen: $4x^3 + x^2 - x - 4 = 0$

Erraten: $x_2 = 1$
Polynomdivision: $(4x^3 + x^2 - x - 4) : (x - 1) = 4x^2 + 5x + 4$

$4x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow$ Wegen negativer Diskriminante keine weitere Nullstelle.

e) Horizontaltangenten: $y' := 0$

biquadratische Gleichung $4x^4 - 47x^2 + 4 = 0$, Substitution $z = x^2$
$z_{1,2} = \ldots\ldots$

$x_3 \approx 3.4$	$x_4 \approx -3.4$	$x_5 \approx 0.29$	$x_6 \approx -0.29$
$y_3 \approx 21.4$	$y_4 \approx -19.4$	$y_5 \approx 1.05$	$y_6 \approx 0.95$

(vergleiche Eigenschaft Punktsymmetrie von G_f!)

f) Extremal- und Wendestellen

$y''(x_3) > 0 \;\rightarrow\;$ Tiefpunkt $T_1(3.4 \,/\, 21.4)$
$y''(x_4) < 0 \;\rightarrow\;$ Hochpunkt $H_1(-3.4 \,/\, -19.4)$
$y''(x_5) < 0 \;\rightarrow\;$ Hochpunkt $H_2(0.29 \,/\, 1.05)$
$y''(x_6) > 0 \;\rightarrow\;$ Tiefpunkt $T_2(-0.29 \,/\, 0.95)$

$y'' := 0 :\quad 30x(x^2 + 12) = 0 \qquad x_7 = 0,\;\; y_7 = 1$

W(0/1) muss Wendepunkt sein, da $y''(-\varepsilon) > 0$ und $y''(\varepsilon) < 0$

Nebenbei: Steigung der Wendetangente: $y'(0) = 0.25$

g) Graph