Lösung Optimierungsaufgabe Nr. 113

Ein gerader Kreiskegel mit dem Volumen V = 10 soll minimale Mantelfläche haben.
Bestimme Höhe und Grundkreisradius dieses Kegels.

Lösung:

Grundkreisradius x, Höhe y des Kegels

Schnitt: Gleichschenkliges Dreieck, $0 < x$, $0 < y$

"Pythagoras": Mantellinie $s = \sqrt{x^2 + y^2}$

Zielfunktion: $M(x,y) = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$ soll minimal werden

Nebenbedingung NB: $V = \frac{1}{3} x^2 \pi y = 10$

Aus NB: $x^2 = \dfrac{30}{\pi y}$ Einsetzen in Quadratur von M:

$M^2(y) = \pi^2 \dfrac{30}{\pi y} \left(\dfrac{30}{\pi y} + y^2 \right) = 30\pi \left(\dfrac{30}{\pi y^2} + y \right)$ soll minimal werden.

$(M^2)'(y) = 30\pi \left(\dfrac{-60}{\pi y^3} + 1 \right) := 0 \rightarrow y^3 = 60 / \pi$

$y = \sqrt[3]{\dfrac{60}{\pi}} \approx 2.67$

Kontrolle: $(M^2)''(y) = 30\pi \left(\dfrac{180}{\pi y^4} \right) > 0$ für alle $y > 0$, also M für $\underline{\underline{y = \sqrt[3]{\dfrac{60}{\pi}}}}$ minimal.

$x^2 = \dfrac{30}{\pi y} = \dfrac{30}{\pi} \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{60}} = \sqrt[6]{\dfrac{450}{\pi^2}} \approx 1.89$

Antwort:

Die Höhe des Kegels beträgt <u>2.67</u>, der Grundkreisradius <u>1.89</u>.