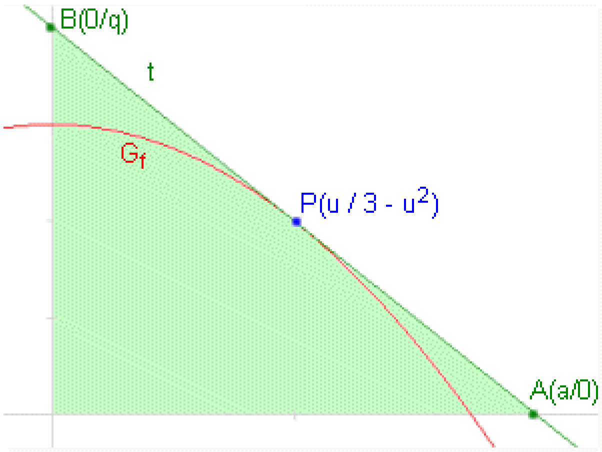
Lösung Optimierungsaufgabe Nr. 126

Im Punkt P(u>0/v) der Parabel p: $y = 3 - x^2$ ist die Tangente an die Parabel zu legen.
a) Welche Koordinaten hat P, wenn das Dreieck, das von der Tangente und von den Koordinatenachsen begrenzt wird, minimalen Inhalt haben soll?
b) Berechne diesen Flächeninhalt.



Lösung:

$y = f(x) = 3 - x^2$, $f'(x) = -2x$

Zielfunktion: Inhalt Dreieck: $F(a,q) = 0.5\, aq$ soll minimal werden.

Nebenbedingungen: a und q in Abhängigkeit von u:

Tangente t: $y = mx + q$ mit $m = f'(u) = -2u$
t: $y = -2u\,x + q$
$P(u / 3 - u^2) \in t$: $3 - u^2 = -2u \cdot u + q \rightarrow \underline{q = 3 + u^2}$
t: $y = -2u\,x + 3 + u^2$

$A(a/0) = t \cap$ x-Achse: $0 = -2u \cdot a + 3 + u^2$

$$\underline{a = \frac{3+u^2}{2u}} \quad (u > 0 \text{ nach Voraussetzung})$$

Zielfunktion $F(u) = \frac{1}{4}\frac{(3+u^2)^2}{u}$ soll minimal werden.

$$F'(u) = \frac{1}{4}\frac{2(3+u^2)\cdot 2u\cdot u-(3+u^2)^2\cdot 1}{u^2} = \frac{1}{4}\frac{(3+u^2)(4u^2-3-u^2)}{u^2} := 0$$

$(3 + u^2)\, 3\, (u^2 - 1) = 0$, also $\underline{u = 1}$, da $u > 0$

Kontrolle: $F'(1-\varepsilon) < 0$, $F'(1+\varepsilon) > 0$, also F für $\underline{u = 1}$ minimal.

Antwort:

Der Inhalt des Dreiecks wird für **<u>u = 1</u>** minimal, nämlich **<u>F(1) = 4</u>**.