Lösung Aufgabe Nr. 104a, p.70, DMK Analysis

$y = f(x) = \cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1$

$y' = f'(x) = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x - 4\sin x \cos x = -\sin x\,(1 + 4\cos x)$

$y'' = f''(x) = -\cos x - 4\cos 2x = -\cos x - 8\cos^2 x + 4$

a) $D = \mathbf{R}$ (hier: Einschränkung $D = [\,0, 2\pi\,[$, denn f ist periodisch mit $p = 2\pi$)

b) G_f ist symmetrisch zur y-Achse: $\cos x + \cos 2x = \cos(-x) + \cos(-2x)$

Nullstellen: $y = 0$: $\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$
$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

I $\cos x = 0.5$, also $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{3}$

II $\cos x = -1$, also $x_3 = \pi$

d) Horizontaltangenten: $y' = 0$: $-\sin x\,(1 + 4\cos x) = 0$

$\sin x = 0$, also $x_4 = 0$, $x_3 = \pi$
$y_4 = 2$, $y_3 = 0$

$\cos x = -0.25$, also $x_5 = 1.823$, $x_6 = 4.460$
$y_5 = -1.125$, $y_6 = -1.125$

e) Extremal- und Wendepunkte

$f''(0) = -5 < 0$, also $H_1(0/2)$ ist Hochpunkt
$f''(\pi) = -3 < 0$, also $H_2(\pi/0)$ ist Hochpunkt

$f''(1.823) = 3.75 > 0$, also $T_1(1.823/-1.125)$ ist Tiefpunkt
$f''(4.460) = 3.75 > 0$, also $T_2(4.460/-1.125)$ ist Tiefpunkt

$y''=0$: $-\cos x - 8\cos^2 x + 4 = 0$

$(\cos x)_1 = 0.6446$, also $x_7 = 0.870$, $x_8 = 5.413$
$y_7 = 0.476$, $y_8 = 0.476$
$(\cos x)_2 = -0.7696$, also $x_9 = 2.449$, $x_{10} = 3.834$
$y_7 = -0.585$, $y_{10} = -0.585$

Alle vier Punkte sind Wendepunkte, liegen sie doch zwischen H und T

g) Graph: s. Buch bzw. TI-Voyage