3. Ganzrationale Funktionen

a) Definitionen und Beispiele

Definition: Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat als Definitionsterm ein Polynom n-ten Grades, d.h. $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ (i = 1,…n)

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Beispiele:
1) $y = f(x) = 1.2x^5 - 17.23x^4 + \pi^{0.5}x^2 - 13$ Grad 5
2) $y = f(x) = 4x + 5.8$ Grad 1

Gegenbeispiele: Keine ganzrationalen Funktionen sind
1) $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$ usw.
2) $y = x^{0.5}$, $y = x^{-3.24}$ usw.
3) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \arcsin x$ usw.
4) $y = e^x$, $y = \ln x$ usw.

Satz: Summe, Differenz und Produkt von ganzrationalen Funktionen sind wieder ganzrationale Funktionen.

Beweis: direkt aus der Definition und den Rechenregeln

Beispiele:
$u(x) = 2x^2$ Grad 2
$v(x) = x - 1$ Grad 1

$u(x) + v(x) = 2x^2 + x - 1$ Grad 2
$u(x) \cdot v(x) = 2x^3 - 2x^2$ Grad 3

Beachte: Der Quotient zweier ganzrationalen Funktionen ist im allgemeinen keine ganzrationale Funktion, z.B. $u(x) = 1$, $v(x) = x$; $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{1}{x}$

b) Nullstellen von ganzrationalen Funktionen

Definition: x_1 ist Nullstelle der Funktion mit Gleichung $y = f(x)$, falls $f(x_1) = 0$ ist.

> **Zerlegungssatz**
> Ist x_1 Nullstelle der ganzrationalen Funktion mit $y = f(x)$ vom Grade n, so ist f(x) durch $x - x_1$ teilbar.

Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - (a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0) \\ &= a_n (x^n - x_1^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_1 (x - x_1) = f(x) - 0 \end{aligned}$$

Wir haben früher gezeigt (bei der Ableitung $f'(x_1)$ von $y = f(x) = x^n$), dass sich $(x^n – x_1^n)$ durch $(x – x_1)$ teilen lässt (für alle $n \in \mathbb{N}$)
Also ist der Term links des Gleichheitszeichens durch $(x – x_1)$ teilbar und somit auch derjenige rechts.

Beispiel: $y = f(x) = x^5 + x^4 – 3x^3 + x^2 + x – 1$
Erraten: $x_1 = 1$ ist Nullstelle
Polynomdivision $f(x) : (x – 1) = x^4 + 2x^3 – x^2 + 1$ (selber!)

Definition: Ist x_1 p-fache Nullstelle der ganzrationalen Funktion mit Gleichung $y = f(x)$, falls $f(x)$ durch $(x – x_1)^p$ teilbar ist.
" p-faches Abspalten des Linearfaktors $(x – x_1)$ "

Beispiel: In $y = f(x) = (x – 3)^2 (x + 5)^4 (x – 1)$ ist
-5 vierfache, 3 zweifache und 1 einfache Nullstelle (f hat Grad 7)

Aus dem Zerlegungssatz folgt der

Nullstellensatz
Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen.
(p-fache Nullstellen werden dabei auch p-fach gezählt)

Aufgabe
Der Graph G_f von $y = f(x) = x^3 – 9x^2 – 24$ und der Graph G_g von $y = g(x) = ax$ schneiden sich im Punkt S(2/?). Bestimme die übrigen Schnittpunkte.

Ordinate $y_S = 2^3 – 9 \cdot 2^2 – 24 = -52$, also S(2/-52)
$S \in G_g$: $-52 = 2a$, also $\underline{a = -26}$
Schnittgleichung: $x^3 – 9x^2 – 24 = -26x$ ist äquivalent zur
Nullstellengleichung: $x^3 – 9x^2 + 26x – 24 = 0$

Da $x_1 = 2$ Lösung dieser Gleichung, so ist $x^3 – 9x^2 + 26x – 24$ durch $(x – 2)$ teilbar: $(x^3 – 9x^2 + 26x – 24) : (x – 2) = x^2 – 7x + 12$ (selber!)
Weitere Lösungen dieser Gleichung: $x^2 – 7x + 12 = (x – 3) (x – 4) = 0$, also
$x_2 = 3$ und $x_3 = 4$ und damit $y_2 = -26 \cdot 3 = -78$ und $y_3 = -26 \cdot 4 = -104$
Resultat: $\underline{S(2/-52),\ S_2(3/-78) \text{ und } S_3(4/-104)}$

Zum Suchen einer Nullstelle hilft etwa der folgende

Satz: Hat die Gleichung $1x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ eine ganzzahlige Lösung x_1 und sind alle $a_i \in \mathbb{Z}$ (i = 0,1,..n-1), so ist x_1 ein Teiler von a_0 .

Beweis: $1x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1x_1 = -a_0$
x_1 ist Teiler der ganzzahligen linken Seite, also auch der rechten Seite.

c) Kurvendiskussion

Gegeben: Ganzrationale Funktion mit Gleichung $y = f(x)$
Gesucht: Graph G_f mit speziellen Punkten

(a) Verhalten im ± Unendlichen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

Für $x \to \pm\infty$ geht die Klammer $(\ldots) \to a_n$
Das Verhalten von $f(x)$ ist also nur vom Term $a_n x^n$ abhängig!

Folgerung: (typische Vertreter $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^3$, $y = -x^3$)

	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$	$f(x) \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$	$f(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ $f(x) \to -\infty$ $(x \to -\infty)$
$a_n < 0$	$f(x) \to -\infty$ $(x \to \pm\infty)$	$f(x) \to -\infty$ $(x \to +\infty)$ $f(x) \to +\infty$ $(x \to -\infty)$

Folgerung: Jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

(b) Symmetrie

(b1) Symmetrie zur y-Achse

Graph G_f einer Funktion mit Gl. $y = f(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse, falls gilt:
$f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D_f$

Figur: selber!

Folgerung: Treten in der Gleichung einer ganzrationalen Funktion nur **gerade** Exponenten von x auf, so ist der Graph symmetrisch zur y-Achse

Beispiel: G_f von $y = f(x) = 5x^4 – 0.783x^2 + 18$

{vgl. auch etwa früher: G_f von $y = f(x) = \cos x$ ist symmetrisch zur y-Achse:
cos x ist eine 'gerade' Funktion}

(b2) Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. zum Punkt (0/c)

Graph G_f einer Funktion mit Gl. $y = f(x)$ ist symmetrisch zum Ursprung, falls gilt:
$f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D_f$

Figur: selber!

Folgerung: Treten in der Gleichung einer ganzrationalen Funktion nur **ungerade** Exponenten von x auf, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung

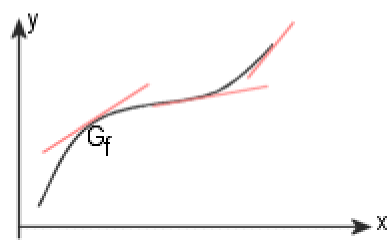
Beispiel: G_f von $y = f(x) = 5.2x^5 - 0.7x^3 + 1.4x$ ist punktsymmetrisch zu (0/0)

{vgl. auch etwa früher: G_f von $y = f(x) = \sin x$ ist punktsymmetrisch zu (0/0):
sin x ist eine 'ungerade' Funktion}

Ausbau: G_g von $y = g(x) = 5.2x^5 - 0.7x^3 + 1.4x + 3$ ist punktsymmetrisch zu (0/3), da G_g der um 3 nach oben verschobene Graph G_f ist.

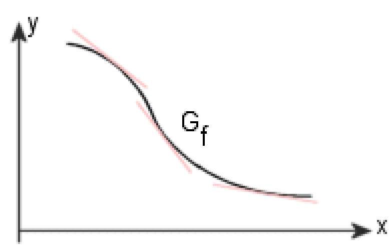
(c) Monotonie

(c1) $f'(x) > 0$ für $x \in$ Intervall I $\rightarrow$ Graph G_f ist **monoton steigend** in I



Steigung der Tangente an G_f in jedem Punkt $(x_0/ f(x_0))$ positiv

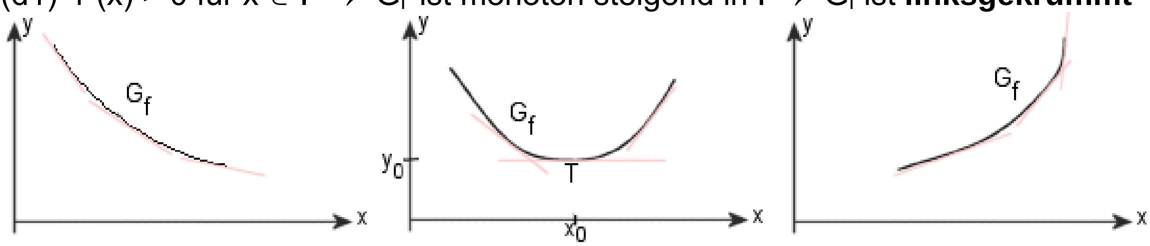
(c2) $f'(x) < 0$ für $x \in$ Intervall I $\rightarrow$ Graph G_f ist **monoton fallend** in I



Steigung der Tangente an G_f in jedem Punkt $(x_0 /f(x_0))$ negativ

(d) Krümmung

(d1) $f''(x) > 0$ für $x \in$ I $\rightarrow$ $G_{f'}$ ist monoton steigend in I $\rightarrow$ G_f ist **linksgekrümmt**

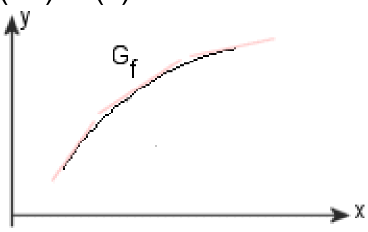


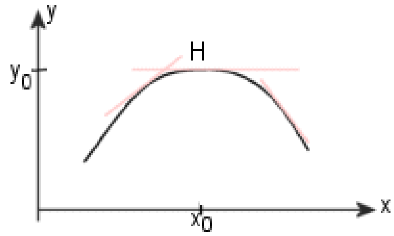
"Je grösser x, desto grösser die Steigungen der Tangenten".

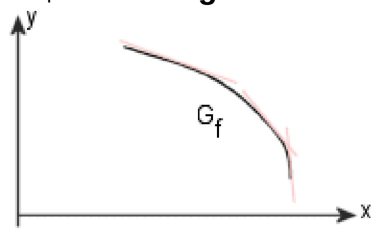
Falls zusätzlich gilt: Es existiert x_0 mit $\mathbf{f'(x_0) = 0}$, so besitzt G_f einen Tiefpunkt $T(x_0 / f(x_0))$. $y_0 = f(x_0)$ ist dann relatives Minimum in I.

Das Kriterium $f''(x_0)>0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für Existenz von T:
Beispiel: $y = f(x) = x^4$. G_f hat T(0/0), aber $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$

(d2) $f''(x) < 0$ für $x \in I \;\rightarrow\;$ $G_{f'}$ ist monoton fallend in I $\rightarrow$ G_f ist **rechtsgekrümmt**





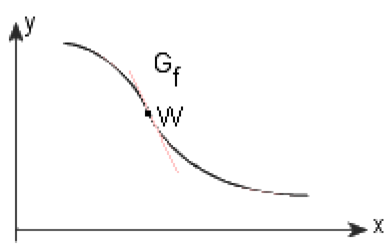


"Je grösser x, desto kleiner die Steigungen der Tangenten".

Falls zusätzlich gilt: Es existiert x_0 mit $\mathbf{f'(x_0) = 0}$, so besitzt G_f einen Hochpunkt $H(x_0 / f(x_0))$. $y_0 = f(x_0)$ ist dann relatives Maximum in I.

Das Kriterium $f''(x_0)<0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für Existenz von H:
Beispiel: $y = f(x) = -x^4$. G_f hat H(0/0), aber $f''(0) = -12 \cdot 0^2 = 0$

(e) <u>Wendepunkt</u>



Definition: $W(x_0 / f(x_0))$ ist **Wendepunkt** von G_f, wenn dort die Krümmung ändert (von Rechts- zu Linkskrümmung oder umgekehrt)
Hat ein Wendepunkt eine Horizontaltangente, so heisst er **Terrassenpunkt** oder **Sattelpunkt**.

$\mathbf{f''(x_0)=0}$ ist notwendige Bedingung für Existenz von W, aber nicht hinreichend:
Beispiel: $y = f(x) = x^4$. $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$, aber G_f hat T(0/0) und nicht Wendepunkt

Zwei Möglichkeiten für hinreichende Kriterien für die Existenz von W:
1) direkt aus Definition: $\varepsilon>0$: $f''(x_0 - \varepsilon) \cdot f''(x_0 + \varepsilon) < 0$ (Vorzeichenwechsel von f'')
2) $f'''(x_0) \neq 0$ (Änderung der zweiten Ableitung)

Möglichkeit 2) ist aber wiederum nicht notwendig:
Beispiel: $y = f(x) = x^5$. G_f hat W(0/0), aber $f'''(0) = 60 \cdot 0^2 = 0$