Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

HDI

<u>Jede</u> Integralfunktion $F_a(x)$ einer <u>stetigen</u> Funktion f(x) ist eine Stammfunktion von f(x), aber nicht umgekehrt, d.h.

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F_a'(x) = f(x)$$

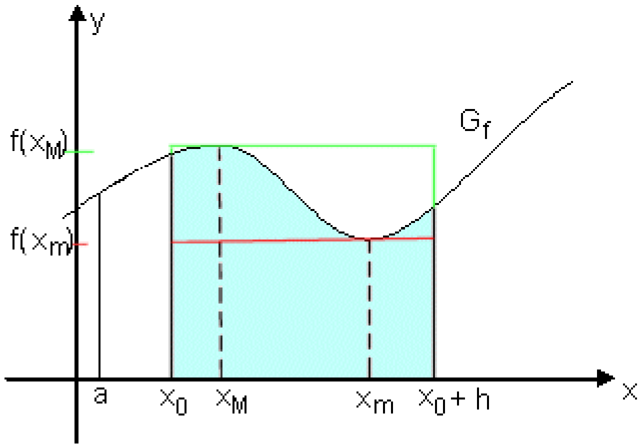
Bemerkung: Insbesondere ist also $F_a(x)$ differenzierbar!

Beweis:

Teil1: $\Rightarrow$) Sei x_0 beliebig.

Dann ist zu zeigen: $F_a'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$

In der Tat: Figur für h>0 (für h<0 analog)



Integriert man abschnittsweise, so gilt:

$$F_a(x_0+h) - F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

(Ist wie in der Figur f(x)>0 im Intervall I:= $[x_0, x_0+h]$, so lässt sich das bestimmte Integral rechts als Inhalt der schraffierten Fläche interpretieren; f(x)>0 ist aber keine nötige Voraussetzung für den HDI)

Abschätzung von $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$:

Da f stetig, so existieren nach dem Extremwertsatz x_m und x_M in I, so dass gilt: $f(x_m)$ ist kleinster Funktionswert und $f(x_M)$ ist grösster Funktionswert in I.

Daher gilt: $h \cdot f(x_m) \leq \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \leq h \cdot f(x_M)$, also nach Division durch $h \neq 0$:

$$f(x_m) \leq \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_M)$$

Übergang zum Grenzwert: Geht $h \to 0$, so gehen $x_0+h \to x_0$, $x_m \to x_0$ und $x_M \to x_0$
Da f **stetig** bei x_0, so ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, also folgt

$\lim\limits_{x_m \to x_0} f(x_m) = \lim\limits_{x_M \to x_0} f(x_M) = f(x_0)$ und damit die Behauptung

$$F_a'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Da x_0 beliebig war, so gilt $F_a'(x) = f(x)$ für alle x.

Teil2: Umkehrung gilt nicht, also nicht jede Stammfunktion ist Integralfunktion von f.

Beweis durch Gegenbeispiel: $f(x) = x$, $F_a(x) = \int\limits_a^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

Da $-\frac{a^2}{2} \leq 0$ (für alle $a \in \mathbb{R}$), so kann z.B. die Stammfunktion $F(x) = \frac{x^2}{2} + 50$ nicht Integralfunktion von f sein.

Folgerung aus dem HDI zur Berechnung des bestimmten Integrals

Gesucht ist $\int\limits_a^b f(t)dt$ der stetigen Funktion f(x):

$F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist nach dem HDI eine Stammfunktion von f(x). Sei F(x) eine weitere, beliebige Stammfunktion von f(x). Die Differenzenfunktion zweier beliebiger Stammfunktionen von f(x) ist eine konstante Funktion $y = C$ (für alle x):

$\int\limits_a^x f(t)dt - F(x) = C$ (für **alle** x)

speziell für x:= b: $\int\limits_a^b f(t)dt - F(b) = C$

und für x:= a: $\int\limits_a^a f(t)dt - F(a) = C$

Da $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$, so ergibt die Subtraktion der untern von der oberen Gleichung:

$\int\limits_a^b f(t)dt - F(b) + F(a) = 0$, also

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b \quad \text{, F(x) beliebige Stammfunktion von f(x)}}$$