Lösungen Aufgabenblatt SF PM: Differentialgleichungen 2. Ordnung

1. a) a = -0.5, b = 1 $\rightarrow \omega^2 = 0.75$, Fall 3; $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$
   b) a = 1, b = 5 $\rightarrow \omega^2 = 4$, Fall 3; $y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$
   Anfangsbedingungen $\rightarrow C_1 = C_2 = 1 \rightarrow y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$
   c) a = 0, b = 1 $\rightarrow \omega^2 = 1$, Fall 3; Störfunktion bereits Lösung der homogenen DGL; Ansatz für y_0 also $y_0 = \alpha_1 x\sin x + \alpha_2 x\cos x$
   Einsetzen des Ansatzes in inhomogene DGL liefert $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0$.
   $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 0.5x\sin x$
   d) a = 0.5, b = -2 $\rightarrow \lambda^2 = 2.25$, Fall 1; $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$
   e) a = 0, b = -4 $\rightarrow \lambda^2 = 4$, Fall 1; $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$
   f) siehe d), aber Störfunktion bereits Lösung der homogenen DGL;
   Ansatz für y_0 also $y_0 = k\,xe^x$. Einsetzen liefert $k = \frac{1}{3}$.
   $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x$

Für Aufgaben 2 und 3: DGL $y'' + 2ay' + by = 0$ (**) mit $a,b \in \mathbb{R}$

2. $y_1 = e^{-ax}$ ist klarerweise Lösung
   $y_2 = xe^{-ax}$, $y_2' = e^{-ax}(1 - ax)$, $y_2'' = -ae^{-ax}(2 - ax)$
   Eingesetzt in (**): $-ae^{-ax}(2 - ax) + 2a\,e^{-ax}(1 - ax) + b\,xe^{-ax} = 0$
   $e^{-ax}(-2a + a^2x + 2a - 2a^2x + bx) = 0$
   $x(-a^2 + b) = 0$ (für alle x), Also muss $a^2 = b$ sein.
   y_2 ist daher Lösung von (**)

3. Sei nun $a^2 - b < 0$; $\omega^2 = b - a^2$ (Fall 3)
   $y_1 = e^{(-a + i\omega)x}$, $y_2 = e^{(-a - i\omega)x}$ (vergleiche Theorie)

   a) Einsetzen!
   Zeige: $\mathrm{Re}(y_1) = e^{-ax}\cos\omega x$ und $\mathrm{Im}(y_1) = e^{-ax}\sin\omega x$ sind Lösungen von (**)
   (und damit $y = e^{-ax}(C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x)$ Lösungsgesamtheit).

   b) $\mathrm{Re}(y_2))= \mathrm{Re}(e^{-ax}\cdot e^{-i\omega x}) = e^{-ax}\cos(-\omega x) = e^{-ax}\cos(\omega x) = \mathrm{Re}(y_1)$
   $\mathrm{Im}(y_2) = \ldots = e^{-ax}\sin(-\omega x) = -e^{-ax}\sin(\omega x) = -\mathrm{Im}(y_1)$ (- ist in C_2 enthalten)

4. $\alpha\cos(\omega t + \gamma) = \alpha(\cos\omega t\,\cos\gamma - \sin\omega t\,\sin\gamma) = \alpha_1\cos\omega t + \alpha_2\sin\omega t$ (für alle t)
   Also gilt $\alpha_1 = \alpha\cos\gamma$ (1) und $\alpha_2 = -\alpha\sin\gamma$ (2)
   Daraus folgt $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha^2$ und damit $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$
   Division von (2) durch (1) liefert $\tan\gamma = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, also $\gamma = \arctan(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1})$