Lösungen Aufgabenblatt 2 Differentialgleichungen

1a) $y'' + 1.6y' + y = 0$ $\quad\quad$ $a = 0.8,\ b = 1$

$a^2 - b = 0.64 - 1 = -0.36 < 0$, also $\omega = 0.6$

$\mathbf{y = e^{-0.8x}\,(C_1 \cos 0.6x\ +\ C_2 \sin 0.6x)}$

vgl. TI: $y = 0.449329^x\,(\cos 0.6x\ + \sin 0.6x)$

b) $y'' + 2y' - 3y = \cos x$ $\quad\quad$ (*)

homogen: $a = 1,\ b = -3,\quad a^2 - b = 4 > 0$, also $\lambda = 2$
$y = e^{-x}\,(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x}$

inhomogen: $y_0 = \alpha_1 \sin x\ +\ \alpha_2 \cos x$
$y_0' = \alpha_1 \cos x\ -\ \alpha_2 \sin x$
$y_0'' = -\alpha_1 \sin x\ -\ \alpha_2 \cos x$
eingesetzt in (*) liefert:
$-4\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$ und $2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0$, also $\alpha_1 = 0.1,\ \ \alpha_2 = -0.2$

Lösungsgesamtheit: $\mathbf{y = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x} + 0.1 \sin x - 0.2 \cos x}$

$y' = C_1\, e^x - 3C_2\, e^{-3x} + 0.1 \cos x + 0.2 \sin x$
Mit den Anfangsbedingungen y(0)=1 und y'(0)=0 folgt:
$C_1 + C_2 - 0.2 = 1$ und $C_1 - 3C_2 + 0.1 = 0$, also $C_1 = \frac{7}{8}$ und $C_2 = \frac{13}{40}$

$\mathbf{y = \frac{7}{8} e^x + \frac{13}{40} e^{-3x} + 0.1 \sin x - 0.2 \cos x}$

2a) $y = f(x) = \frac{b}{a}x - C_1\frac{1}{a}e^{-ax} + C_2$ $\quad\quad$ b) $y = f(x) = -x - e^{-x} + 5$

3a) y1 := y, y1' = y' = y2, y1'' = y2' = -2y2 + 3y1 + cos t
yi1 = 1, yi2 = 0.
Mit TI Voyage, TABLE folgt **y(1) ≈ 2.3698, y(5) ≈ 129.36**
Vergleich mit den 'exakten' Resultaten als Folge von 1b):
y(1) ≈ 2.37076, y(5) ≈ 129.709

b) $y1 = x_1$, $y1' = x_1' = y2$, $y3 = x_2$, $y3' = x_2' = y4$
y1'' = y2' = -2y1 – y3, y3'' = y4' = 3y1 + y3, yi1 = 1, sonst alle yi… = 0

Resultate: $\mathbf{x_1(1) \approx 0.04259,\ x_2(1) \approx 1.376,\ \ x_1(5) \approx 7.4604,\ x_2(5) \approx -19.48}$

4. s. http://www.mathematik.ch/klasse6/Stausee.pdf