Lösungen Matura 2002, Grundlagenfach, KSR

Nr. 1

$y' = \frac{x^2(x-3)}{3(x-2)^2}$ $\qquad$ y'' = f''(x) (s. Aufgabenblatt)

a) Nullstelle: $x^3 - 27x + 54 = 0$ $\quad$ $\mathbf{x_1 = 3}$
Polynomdivision: $(x^3 - 27x + 54) : (x - 3) = x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x + 6)$
x_1 ist also zweifache Nullstelle, $\mathbf{x_2 = -6}$

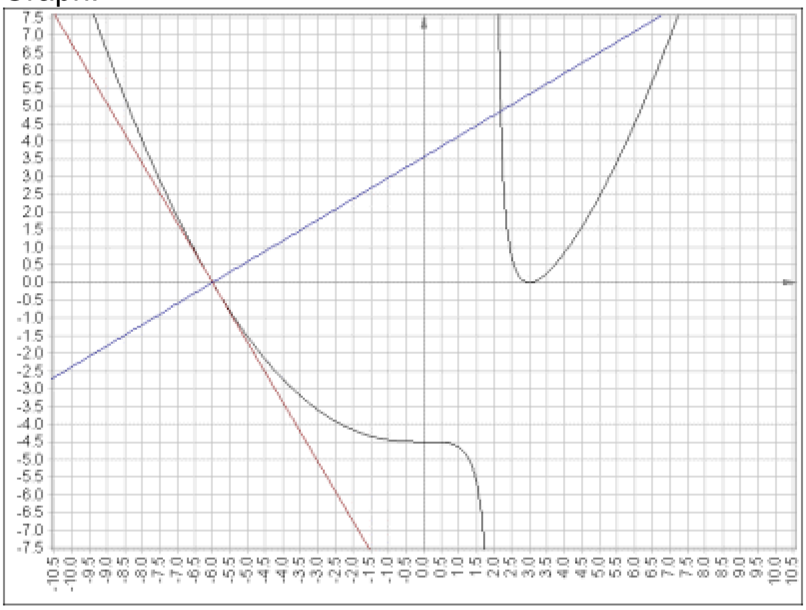
Asymptoten: **g: x = 2** (vertikale Asymptote); keine schiefe Asymptote

Extremalpunkte: y' = 0
$\mathbf{x_3 = 0}$ (zweifach) $\qquad$ $\mathbf{x_1 = 3}$
$y_3 = -4.5$ $\qquad$ $y_1 = 0$

$f''(0) = 0$, also cand Wendepunkt: $f''(-\varepsilon) > 0$, $f''(\varepsilon) < 0$
W(0/-4.5) ist Wendepunkt (sogar Terrassenpunkt)

$f''(3) > 0$, also **T(3/0) Tiefpunkt**

b) Graph:



c) N(-6/0)

$f'(-6) = \text{Steigung } m_t \text{ der Tangente} = \frac{-27}{16} \rightarrow \text{Steigung } m_n \text{ der Normalen} = \frac{16}{27}$

$t:\ y = \frac{-27}{16}x + q_t\ ,\ N \in t \ \rightarrow\ t:\ y = \frac{-27}{16}x - \frac{81}{8}$

$n:\ y = \frac{16}{27}x + q_n\ ,\ N \in n \ \rightarrow\ n:\ y = \frac{16}{27}x + \frac{32}{9}$

Flächeninhalt Dreieck = $\frac{6}{2}\left(\frac{81}{8} + \frac{32}{9}\right) = \frac{985}{24} \approx 41.04$

Nr. 2

a) Ebene E = (ABC): $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Elimination von s und t : **E: 2x – 6y + 5z + 22 = 0**

g = (CD): $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $D(1/4/0) \in E$, denn 2 – 24 + 0 + 22 = 0

Beh.: Viereck ABCD ist Parallelogramm

Beweis: $\overrightarrow{AB} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha = \text{Winkel}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$: $\cos\alpha$ = ... $\rightarrow$ $\alpha \approx$ **63.61°**

c) $P \in g$: P(1 + t / 4 + 2t / 2t)

Dreieck ABP rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P: $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

$\begin{pmatrix} -2+t \\ 1+2t \\ 2+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4+t \\ -3+2t \\ -2+2t \end{pmatrix} = 0$, also $9t^2 - 10t + 1 = (9t-1)(t-1) = 0$

$t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{9}$, daher $P_1(2/6/2)$, $P_2(\frac{10}{9} / \frac{38}{9} / \frac{2}{9})$

d) $\sin\alpha = \frac{h_{AB}}{|\overrightarrow{AD}|}$, also $h_{AB} = |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{65}}{3} \approx 2.687$

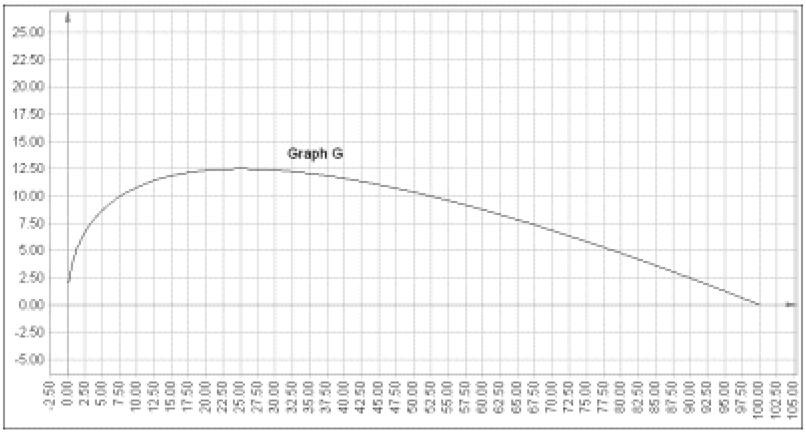
Flächeninhalt F des Parallelogramms = $|\overrightarrow{AB}| \cdot h_{AB} = 2\sqrt{65} \approx 16.1245$

Nr. 3

$f(x) = a\sqrt{x} - bx$ a, b > 0

Nullstellen: $a\sqrt{x} = bx$, $x_1 = 0$, $\sqrt{x} = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{a^2}{b^2}$

a) a = 5, b = 0.5 $x_1 = 0$, $x_2 = 100$



Tangenten: (bei 0 ist eigentlich f nicht differenzierbar) **t_1: x = 0** (y-Achse)

Bei 100: $f'(x) = 0.5ax^{-0.5} - b$, $f'(100) = m_t = -0.25$

$(100/0) \in t \quad \rightarrow$ **t: y = -0.25x + 25**

Durchmesser ist beim Hochpunkt am grössten (vgl c) Länge ist nicht Durchmesser!)

$f'(x) = 0$: $ax^{-0.5} = 2b$, daher $x = \dfrac{a^2}{4b^2} = 25$

Durchmesser = 2 (5 · 5 – 0.5 · 25) = **25**

b) Volumen $V_{Rot} = \pi \int_0^{100} (5\sqrt{x} - 0.5x)^2 dx = \pi \left[25\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{12} - 2x^{2.5} \right]_0^{100} = \dfrac{25000\pi}{3}$

c) Länge = 81, Durchmesser = 27

$x_2 = 81 = \dfrac{a^2}{b^2} \qquad 27 = 2\left(a\sqrt{\left(\dfrac{a}{2b}\right)^2} - b\dfrac{a^2}{4b^2} \right) = \dfrac{a^2}{2b}$

$b = \dfrac{2}{3}$, a = 6

d) $b = \dfrac{2}{3}$ Behauptung: Durchmesser = $\dfrac{1}{3}$ Länge (unabhängig von a)

Beweis: $x_2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ = **Länge = $\dfrac{9a^2}{4}$**

Durchmesser an Stelle $x = \dfrac{a^2}{4b^2} = \dfrac{9a^2}{16}$:

Durchmesser = $2\left(a\dfrac{3a}{4} - \dfrac{2}{3}\dfrac{9a^2}{16}\right) = \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{1}{3}$ Länge

Nr. 4

16 Felder: 7-mal 0, 4-mal 1, 3-mal 2 und 2-mal 3

a) P(A) = P(1,1) = $\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}=\frac{1}{20}$

P(B) = P(mindestens ein Feld 0) = 1 – P(kein Feld 0) = 1 - $\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}=\frac{7}{10}$

b) p(keine Null) = 0.3 (s. bei a))

10 Karten, 4 Gewinne: $P_{10}(4) = \binom{10}{4} 0.3^4\, 0.7^6 \approx 0.20$

c) p(3,3) = $\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{120}$ Man benötige x Karten.

P(in x Karten mindestens ein Gewinn) = 1 – P(in x Karten kein Gewinn) > 0.5

$1 - \left(\frac{119}{120}\right)^x > 0.5$ also $x \ln \frac{119}{120} < \ln 0.5$, also x > 82.83

Man muss **83** Karten kaufen.

d) Zufallsvariable X: Gewinn

X	0	1	5	10	30
p(x)	0.7	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$

Erwartungswert μ = E(X) = $\frac{13}{60}+\frac{5}{20}+\frac{10}{40}+\frac{30}{120}=\frac{29}{30}$ (in Franken)

Nr. 5

a) $f(x) = x^2 e^x$, $g(x) = 2 e^x$

Schnitt: $x^2 e^x = 2 e^x$, also $x^2 = 2$, somit $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$

Inhalt $A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2e^x - x^2 e^x)\, dx = \left[2e^x - e^x(x^2 - 2x + 2)\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$

(für Stammfunktion von $x^2 e^x$: s. Fosa, p.46, a=1, $p(x)=x^2$)

$A = -e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}}(2 + 2\sqrt{2}) \approx 4.581$

b) Ebene E=(ABC): (Achsenabschnittsform) E: $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2} = 1$, also

E: $6x + 2y + 3z - 6 = 0$, daher Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gerade g = (PQ) soll senkrecht auf E stehen, also ist ihr Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ ein Vielfaches des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$.

Da $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$, so muss $\overrightarrow{PQ} = 3 \cdot \overrightarrow{n_E}$ sein.

Also $7 - p = 6$ und $q + 1 = 9$, daher **p = 1** und **q = 8**.

Gerade l_P senkrecht E durch P: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$l_P \cap E$: $-42 + 36t + 2 + 4t - 3 + 9t - 6 = 0$, also $t = 1$. D.h. der Fusspunkt ist $1 \cdot \overrightarrow{n_E}$ von P entfernt, also $d(P,E) = |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{36+4+9} = 7$.

Analog für Q: ($t = -2$) $d(Q,E) = 2|\overrightarrow{n_E}| = 2\sqrt{36+4+9} = 14$.