Differentialgleichungen in der Physik: Vermischte Übungen

Lösungen

Aufgabe 1

a) m = 0.2kg, F_{Schub} = 6N, k = 0.1Ns/m, t_B = 2.5s

$$m \cdot \ddot{s} = F_{Schub} - F_G - k \cdot \dot{s}$$
$$m \cdot \dot{v} = F_{Schub} - F_G - k \cdot v$$
$$\dot{v} = -\frac{k}{m} \cdot v + \frac{F_{Schub}}{m} - g$$

Zahlen einsetzen (ohne Einheiten): $\dot{v} = -0.5 \cdot v + 20$

Allgemeine Lösung homogene Glg.: $v_H(t) = v^* \cdot e^{-0.5 \cdot t}$ (Integrationskonstante v^*)
Partikuläre Lösung inhomogene Glg., Ansatz v = *konst.* : v_I = 40
→ Allgemeine Lösung inhomogene Glg.: $v(t) = v^* \cdot e^{-0.5 \cdot t} + 40$
Anfangsbedingung: $v(0)$ = 0 → v^* = -40
Lösungsfunktion: $v(t) = 40 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot t}\right)$

→ $v(2.5\text{s}) = 28.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

→ $s(2.5\text{s}) = \int_0^{2.5} 40 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot t}\right) dt = 42.9\text{m}$ (V-200)

b) Die Differentialgleichung für die weitere Bewegung (ohne Schub) lautet:
$\dot{v} = -\frac{k}{m} \cdot v - g$ bzw. $\dot{v} = -0.5 \cdot v - 10$
Allgemeine Lösung: $v(t) = v^* \cdot e^{-0.5 \cdot t} - 20$ (Integrationskonstante v^*, siehe oben)
Anfangsbedingung: $v(0)$ = 28.5 → v^* = 48.5 (Neuer Zeitnullpunkt: Ende der Brenndauer)
Lösungsfunktion: $v(t) = 48.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t} - 20$
Höchster Punkt wird erreicht, wenn $v(t_h)$ = 0, also

$0 = 48.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t_h} - 20$ → $t_h = -2 \cdot \ln\left(\frac{20}{48.5}\right) = 1.77\text{s}$

→ $s(1.77\text{s}) = \int_0^{1.77} \left(48.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t} - 20\right) dt = 21.6\text{m}$ (V-200)

Die maximale Höhe ist also: s_{max} = 42.9m+21.6m = 64.5m

Aufgabe 2

a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 6.32\text{s}^{-1}$; $\delta = \frac{k}{2m} = 0.75\text{s}^{-1}$; $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = 6.28\text{s}^{-1}$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.00\text{s}$

b) $e^{-\delta \cdot t} = \frac{1}{10}$ → $t = -\frac{1}{\delta} \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) = 3.07\text{s}$

c) Lösungsfunktion (gedämpfte Schwingung):

$$s(t) = \left(\hat{s}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{s}_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$\dot{s}(t) = -\delta \cdot \left(\hat{s}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{s}_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)\right) \cdot e^{-\delta \cdot t} + \left(\omega \cdot \hat{s}_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega \cdot \hat{s}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Anfangsbedingungen: $s(0) = 0.08\text{m}$, $v(0) = 0\text{m/s}$

→ $\hat{s}_2 = 0.08\text{m}$

→ $0 = -\delta \cdot \hat{s}_2 + \omega \cdot \hat{s}_1$ → $\hat{s}_1 = \frac{\delta}{\omega} \cdot \hat{s}_2 = 0.00955\text{m}$

In Lösungsfunktion einsetzen und für t = 3s auswerten:

$s(3\text{s}) = 0.00842\text{m}$

d) $A = \frac{\hat{F}_A}{m} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\hat{s} = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega_E{}^2\right)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E{}^2}} = 0.101\text{m}$$

Aufgabe 3

a)

Wärme: $\Delta Q = c_W \cdot m_W \cdot \Delta T \quad \Big| \div \Delta t$

→ $\dot{Q} = c_W \cdot m_W \cdot \dot{T}$

Leistung: $P = \dot{Q} = P_{Heizung} - P_{Abkühlung} = P_{Heizung} - k \cdot A \cdot (T - T_A)$

DGL für $T(t)$: $c_W \cdot m_W \cdot \dot{T} = P_{Heizung} - k \cdot A \cdot (T - T_A)$

$3200 \cdot \dot{T} = 800 - 2 \cdot (T - 20)$

$\dot{T} = -\frac{1}{1600} \cdot T + \frac{21}{80}$

Allg. Lsg. H: $T_H(t) = T^* \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$

Part. Lsg. I: $T_I = 420$ (aus $T = konst.$; $\dot{T} = 0$)

Allg. Lsg. I: $T(t) = T^* \cdot e^{-\frac{t}{1600}} + 420$

Anfangsbed.: $T(0) = 10$ → $T^* = -410$

Lösungsfunktion: $T(t) = 420 - 410 \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$

b) $100 = 420 - 410 \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$

→ $t = -1600 \cdot \ln \frac{320}{410} = 397\text{s} \approx 400\text{s}$