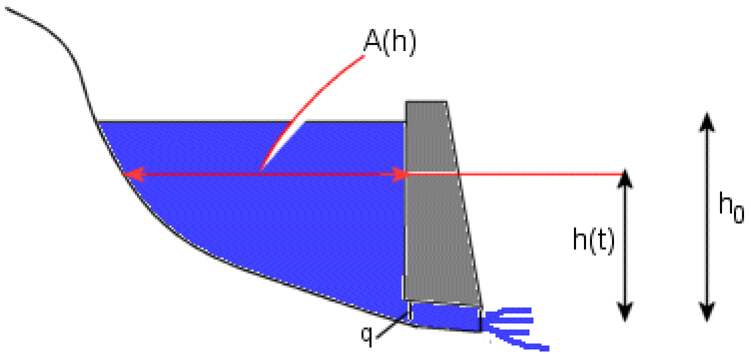
Entleerung eines Stausees (aus DMK Analysis, Aufgabe 81, Seite 162)

Das Wasser eines Stausees muss wegen Reparaturarbeiten abgelassen werden.



a) Ermittle den Zusammenhang zwischen der Ausflusszeit t, dem Wasserstand h(t) und dem Inhalt A(h) der Wasseroberfläche und stelle eine Differentialgleichung für h(t) auf. Benutze dabei das Gesetz von Torricelli: Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$

b) Löse die Differentialgleichung unter der Annahme, dass die Uferwände
  - b1) vertikal sind (A(h) ist eine konstante Funktion)
  - b2) geradlinig auf den Fuss der Staumauer zugehen (A(h) ist eine lineare Funktion)
  - b3) parabelförmig auf den Fuss der Staumauer zugehen (A(h) ist eine quadratische Funktion)

  In welcher Zeit T ist jeweils der Stausee entleert (h(T) = 0) ?

Lösung

a) Gleiches Wasservolumen in der Zeit dt: $-A(h)\,dh = q\,ds = q\,v(t)\,dt$

Also gilt: $-A(h)\,dh = q\sqrt{2gh}\,dt = q\sqrt{2g}\,\sqrt{h}\,dt$

Die Gleichung für die gesuchte Funktion h(t) lautet also in separierter Form:

$$\frac{A(h)}{\sqrt{h}}\,dh = -k\,dt, \text{ wobei } k = q\sqrt{2g} \text{ ist}$$

b) $h_0 = h(0)$, $A_0 = A(h_0)$

b1) $A(h) = A_0$ ….(selber) $t = \frac{2A_0}{k}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)$ $T = \frac{2A_0}{k}\sqrt{h_0}$

b2) $A(h) = \frac{A_0}{h_0}h$ … t = … $T = \frac{2A_0}{3k}\sqrt{h_0}$

b3) $A(h) = \frac{A_0}{h_0^2}h^2$ … t = … $T = \frac{2A_0}{5k}\sqrt{h_0}$