KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

Maturitätsprüfungen 1996
(Be / Sw)

**M a t h e m a t i k** Typus C

Bemerkungen:

Zeit: Drei Stunden.
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.
Hilfsmittel: DMK Formeln und Tafeln, Taschenrechner TI-82 bzw. TI-85 (graphikfähig).

1. Durch $k_a$: $(x + y)^4 = a\cdot x^3$ ist eine Kurvenschar durch den Ursprung mit dem Scharparameter $a > 0$ gegeben [Schooten-Kurve, nach Frans van Schooten (1615-1660), bearbeitet durch Christian Huygens (1629-1695)].

   a) Notiere die zur Kurve $k_a$ gehörenden reellen Funktionen $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ und bestimme von diesen Funktionen Definitionsbereich, Nullstellen, Hochpunkt H und Kurventangenten im Ursprung in Abhängigkeit von a.

   b) Setze nun a: = 4. Die vertikale Gerade x = t schneidet die Kurve $k_4$ in den beiden Punkten $T_1$ und $T_2$. Zeige, dass sich die beiden Kurventangenten $t_1$ und $t_2$ durch $T_1$ und $T_2$ immer auf der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten schneiden; bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Tangenten.

   c) Zeichne die algebraische Kurve $k_a$ für a = 4 mit den Tangenten durch die Punkte $T_1$ und $T_2 \neq T_1$, wenn die Abszisse dieser Punkte gleich einer Nullstelle von $k_4$ ist.

   d) Bestimme den Inhalt der von der Kurve $k_a$ und der vertikalen Geraden durch die positive Nullstelle eingeschlossenen Fläche in Abhängigkeit von a.

2. Gegeben sind der Punkt P(12/1/1) sowie die zwei Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

   m: Parallele zur z-Achse durch den Punkt (1/0/0).

   a) P und g bestimmen eine Ebene E. Gib ihre Koordinatengleichung an.

   b) E soll Tangentialebene einer Kugel k mit Radius 3 sein, deren Mittelpunkt M auf der Geraden m liegt und minimale z-Koordinate hat.
   Wie heisst die Gleichung von k?

   c) Bestimme die Gleichung derjenigen Kugeltangente h an k, die in E liegt und die z-Achse schneidet.
   Wie gross ist der Winkel zwischen den beiden Geraden g und h?

   d) Wie lautet die Gleichung derjenigen andern Tangentialebene $\Delta$ an k, die die Gerade g enthält?

3. In einem Wettermodell gibt es Regentage (R-Tage) , bewölkte Tage (B-Tage) und Sonnentage (S-Tage). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen R-Tag ein B-Tag folgt (oder umgekehrt), sei a. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen B-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), sei ebenfalls a. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen R-Tag ein S-Tag folgt (oder umgekehrt), sei $\frac{a}{2}$.
Nach einem **Regentag** wird die Periode der n darauffolgenden Tage betrachtet.

a) Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse
a1) auf einen R-Tag folgt ein R-Tag? a2) auf einen S-Tag folgt ein S-Tag?
a3) auf einen B-Tag folgt ein B-Tag?
Leite daraus eine Bedingung für a ab.

b) Sei a = 0.2. Wie lange muss die Periode n mindestens sein, damit mit Wahrscheinlichkeit kleiner als 10% lauter Regentage auftreten?

c) Berechne in Abhängigkeit von n und a die W'keit, dass jeder der n Tage ein Sonnentag ist. Wie gross muss a (in Abhängigkeit von n) gewählt werden, damit diese W'keit maximal ist?

d) Sei nun n = 2. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Sonnentage in dieser Periode. Berechne für allgemeines a den Erwartungswert E(X).
Für welches a wird E(X) maximal?

4. Löse die beiden unabhängigen Teilaufgaben.

a) Gegeben ist die Affinität f mit den Gleichungen f: x' = ax + b, y' = cy sowie die Kurve mit Gleichung $y = g(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$.
Bestimme zuerst die reellen Parameter a>0, b und c derart, dass der Graph von g unter der Affinität f auf die Kurve mit Gleichung $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ abgebildet wird. Gib nun die Abbildungsdeterminante von f an, entscheide, ob f eine perspektive Affinität ist und ob f Fixgeraden besitzt.

b) Die Funktion mit Gleichung $f:\ x \to y = \dfrac{x}{1+x^2}$ lässt sich für gewisse x-Werte als Grenz- wert einer geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied x und dem Quotienten $q = -x^2$ auffassen. Bricht man die geometrische Reihe nach n Gliedern ab, so stellt die berech- nete Summe $P_n(x)$ eine Approximation für die Funktion f dar.
Bestimme durch Integration von $P_4(x)\cdot \ln(x)$ eine Näherung für das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\cdot\ln(x)}{1+x^2}\,dx$.

5. Gegeben ist die komplexe Funktion $z \to w = f(z) = \dfrac{z}{1-i\cdot z}$.

a) Bestimme alle Fixpunkte dieser Abbildung.

b) Bilde den Einheitskreis und die relle Achse mit f ab.

c) Es sei $f^1(z) = f(z)$, $f^2(z) = f(f(z))$ und $f^{n+1}(z) = f(f^n(z))$ die Verkettung(en) der Funktion f mit sich selbst.
Berechne $f^n(z)$ für n = 2, 3 und 4; stelle eine Vermutung für beliebiges n auf und beweise diese mit vollständiger Induktion.

d) Bestimme für beliebiges z den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(z)$.