

Bemerkungen

Jede Aufgabe soll auf einer neuen Seite begonnen werden.

Zeit : 3 Stunden.

Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet.

Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

Viel Glück!

1. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = e^{-x^2}$.
- Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[0;21]$, wobei die Einheitsstrecke auf den Koordinatenachsen 6 cm lang sein soll.
 - Ein Rechteck soll so zwischen die x -Achse und den Graphen von f eingefügt werden, dass sich zwei seiner Seiten auf den positiven Koordinatenachsen befinden und ein Eckpunkt auf dem Graphen von f liegt.
Wie gross ist der maximale Flächeninhalt dieses Rechtecks ?
 - Der Graph von f kann durch den Graphen einer zweiten Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \frac{1}{1 + cx^2}$ angenähert werden. Bestimmen Sie die Konstante c so, dass der Graph von g durch den Wendepunkt des Graphen von f geht.
Skizzieren Sie dann auch den Graphen von g in das Koordinatensystem von a).
2. Zwei Basketballspielerinnen B und C trainieren Freiwürfe. B trifft durchschnittlich 2 von 3 Ballen in den Korb, C bloss 2 von 5 Bällen.
- B wirft dreimal hintereinander auf den Korb. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt sie dabei genau einen Treffer ?
 - Wieviele Male muss C mindestens auf den Korb werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99.9 % mindestens einmal zu treffen ?
 - B und C werfen je dreimal auf den Korb. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei B mehr Treffer als C erzielt ?
 - B und C werfen abwechselungsweise je einen Ball auf den Korb. Wer als erste einen Treffer erzielt, gewinnt dieses Turnier, welches unter Umständen ewig dauern kann. Die schwächere Spielerin C darf beginnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt C dieses Turnier ?

3. Gegeben sind die drei Punkte $A(4/2/5)$, $B(6/0/6)$ und $C(7/2/8)$.

- Ergänzen Sie das Dreieck ABC zum Parallelogramm ABCD und zeigen Sie: ABCD ist sogar ein Quadrat!
- Bestimmen Sie den Punkt S in der (x,z) -Ebene so, dass S als Spitze einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD aufgefasst werden kann.
- Berechnen Sie den Winkel α zwischen Seitenkante der Pyramide.
- Die Pyramide besitzt eine Umkugel. Wie lautet die Gleichung dieser Kugel?

4. Gegeben sind die Funktionen mit Gleichungen $y = f(x) = \sqrt{x} + 4$ und $y = g(x) = x^2 - 3.5x + 4$.

- Zeigen Sie, dass die beiden Graphen zwei Schnittpunkte mit ganzzahligen Koordinaten haben
- Die zwei Graphen schliessen ein Flächenstück ein. Wie gross ist sein Inhalt?
- Eine Gerade h gehe durch den Punkt $(0/4)$. Berechnen Sie ihre Steigung derart, dass h das Flächenstück von Aufgabe b) halbiert.
- Das Flächenstück von Aufgabe b) rotiere nun um die x-Achse und erzeugt so einen Rotationskörper. Wie gross ist sein Volumen?

5. Zwei voneinander unabhängige Aufgabenteile:

a) Bestimmen Sie im Intervall $[0, 2\pi]$ die Koordinaten der Tiefpunkte der Funktion mit Gleichung $y = f(x) = 2 \sin^2 x + \sin(2x) + \cos(2x)$.

b) Ein Kreis geht durch den Punkt $P(0/9)$ und berührt die beiden Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes dieses Kreises k. Es muss nur eine Lösung angegeben werden.