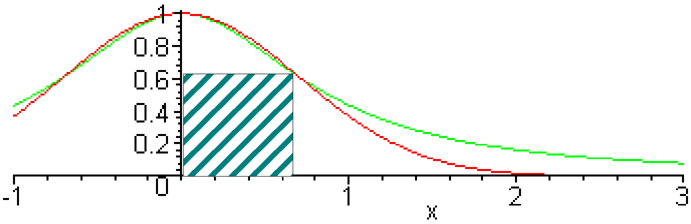
Lösung der Aufgabe 1



a) Graph von $f(x) = e^{-x^2}$ und von $g(x) = \dfrac{1}{1 + 2\cdot(e^{\frac{1}{2}} - 1)\cdot x^2}$

b) Fläche des Rechtecks $F(x) = x \cdot y = x \cdot e^{-x^2}$

$F'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

Extremum für $F'(x) = 0$:

$1 - 2x^2 = 0$; $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Aus geometrischen Gründen : das Maximum wird für die positive oder die negative Lösung erreicht. Der maximale Flächeninhalt ist $\underline{F_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}$ = 0,428881...

c) Wendepunkt des Graphen von f: $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = (-2 + 4x^2) \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = 0$ für $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; y-Koordinate der Wendepunkte : $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-½}$

Nun soll $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-½}$ sein : $\dfrac{1}{1 + c(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = e^{-\frac{1}{2}}$ also $1 + ½ \cdot c = e^{½}$ und damit $\underline{c = 2\cdot(e^{½} - 1)}$

Lösung der Aufgabe 2

Ereignis B: die Spielerin B trifft in den Korb; C: die Spi elerin C trifft in den Korb, $P(B) = \frac{2}{3}$; $P(C) = \frac{2}{5}$.

a) P(genau ein Treffer für Spielerin B bei drei Würfen) =

$= P(B \cap \overline{B} \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap B \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap \overline{B} \cap B) = \binom{3}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

b) P(C trifft mindestens einmal in n Würfen) = 1 - P(C trifft nie in n Würfen) = $1 - (\frac{3}{5})^n > 0{,}999$

$(\frac{3}{5})^n < 0{,}001$. Man erhält durch logarithmieren n > 13,52...
Die Spielerin C muss also mindestens 14 mal werfen, um mit der Wahrscheinlichkeit von 99,9% mindestens einmal zu treffen.

c) P(B hat mehr Treffer als C in drei Würfen) =
= P(B trifft einmal, C nie oder B trifft zweimal, C höchstens einmal oder B trifft dreimal und C höchstens zweimal) =

$$= \binom{3}{1}(\tfrac{2}{3})^1(\tfrac{1}{3})^2 \cdot \binom{3}{0}(\tfrac{2}{5})^0(\tfrac{3}{5})^3 + \binom{3}{2}(\tfrac{2}{3})^2(\tfrac{1}{3})^1 \cdot \left[\binom{3}{1}(\tfrac{2}{5})^1(\tfrac{3}{5})^2 + \binom{3}{0}(\tfrac{2}{5})^0(\tfrac{3}{5})^3\right] +$$

$$+ \binom{3}{3}(\tfrac{2}{3})^3(\tfrac{1}{3})^0 \cdot \left[\binom{3}{2}(\tfrac{2}{5})^2(\tfrac{3}{5})^1 + \binom{3}{1}(\tfrac{2}{5})^1(\tfrac{3}{5})^2 + \binom{3}{0}(\tfrac{2}{5})^0(\tfrac{3}{5})^3\right] =$$

$= \frac{6}{27}\cdot\frac{27}{125} + \frac{12}{27}\cdot\left[\frac{54}{125}+\frac{27}{125}\right] + \frac{8}{27}\cdot\left[\frac{36}{125}+\frac{27}{125}+\frac{27}{125}\right] = \frac{6}{125}+\frac{36}{125}+\frac{10}{375} = \frac{18+108+80}{375} = \frac{206}{375} = 0{,}549..$

d) $P(C \cup \overline{C}\cap\overline{B}\cap C \cup \overline{C}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{B}\cap C \cup .....) =$
$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{3}\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{1}{3}\frac{2}{5} + ... = \frac{2}{5}\cdot(\frac{1}{5}+(\frac{1}{5})^2+(\frac{1}{5})^3+..... =$
$= \frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4} = ½$

Lösung der Aufgabe 3

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{CD} = \vec{r}_C - \vec{AB} = \begin{pmatrix}7\\2\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix}$, also D(5/4/7)

Ausserdem ist $\vec{AB}\perp\vec{BC}$: $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$

b) S(x/0/z) liegt auf der Normalen zur Dreieckebene (ABC) in der xz-Ebene [y = 0] :

(ABC): $\vec{r} = \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ oder in Koordinatenform : 2x + y - 2z = 0; die Ebene geht durch den Ursprung, Normalenvektor ist $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

Normale durch den Mittelpunkt (5,5/2/6,5) des Quadrates schneidet die Ebene y = 0 :

n : $\vec{r} = \begin{pmatrix}5{,}5\\2\\6{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}$ für t = - 2, also <u>S(1,5 / 0 / 10,5)</u>

c) Winkel α zwischen der Kantengeraden (AS) und der Quadratdiagonalen (AC):

$\cos\alpha = \frac{\vec{AS}\cdot\vec{AC}}{\overline{AS}\cdot\overline{AC}} = \frac{\begin{pmatrix}5{,}5\\-2\\-2{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{30{,}25+4+6{,}25}\cdot\sqrt{9+0+9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$; α = 70,528... °

d) Mittelpunkt M liegt auf der Normalen n zu (ABC) und geht durch S : M (5,5 +2t / 2 + t / 6,5 - 2t) und hat von S und z.B. A den gleichen Abstand :

$\overline{MS} = \overline{AM}$: $\sqrt{(-4-2t)^2+(-2-t)^2+(4+2t)^2} = \sqrt{(1{,}5+2t)^2+t^2+(1{,}5-2t)^2}$. Man erhält die Lösung $t = -\frac{7}{8}$, also M($\frac{15}{4}$ / $\frac{9}{8}$ / $\frac{33}{4}$) und R = $\frac{27}{8}$

Lösung der Aufgabe 4

a) Schnittpunkte : $\sqrt{x} + 4 = x^2 - 3{,}5x + 4 \qquad | -4$

$\sqrt{x} = x^2 - 3{,}5\,x = x\cdot(x-3{,}5) \qquad |$ quadrieren

$x = x^2\cdot(x^2 - 7x + 12{,}25) = x^4 - 7x^3 + 12{,}25\,x^2$

oder $x^4 - 7x^3 + 12{,}25\,x^2 - x = 0$ bzw. $x\cdot(x^3 - 7x^2 + 12{,}25x - 1) = 0$

Durch Probieren (bzw. aus der graphischen Darstellung) erhält man die ganzzahligen Lösungen $x = 0$ und $x = 4$.

b) $F = \int_0^4 (\sqrt{x} + 4)dx - \int_0^4 (x^2 - 3{,}5x + 4)dx = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x^3}{3} + 3{,}5\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 12$

c) Der zweite Schnittpunkt der Geraden $y = m\cdot x + 4$ mit der Parabel hat die x-Koordinate $x = 3{,}5 + m$.
Die Fläche zwischen der Geraden und der Parabel ist :

$$\int_0^{3{,}5+m} (mx + 4 - (x^2 - 3{,}5x + 4))dx = \int_0^{3.5+m} (-x^2 + (3{,}5 + m)x)dx = 6$$

$$(3{,}5+m)^3 = 36$$

$$m = \sqrt[3]{36} - 3{,}5 = -0{,}198...$$

d) $V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x} + 4)^2 dx - \pi\int_0^4 (x^2 - 3{,}5x + 4)^2 dx = \frac{344}{3} - \frac{144}{5} = \frac{1288}{15} = 85{,}86...$

Lösung der Aufgabe 5

a) $y = 2\sin^2 x + \sin(2x) + \cos(2x)$

$y' = 2\cos(2x) - 2\sin(2x) + 4\sin x\cos x = 2\cos(2x) - 2\sin(2x) + 2\sin(2x) = 2\cos(2x)$

$y' = 0$: $\cos(2x) = 0$ ergibt $\quad 2x = 0^\circ / 90^\circ / 180^\circ / 270^\circ$ usw.

$x = (2k-1)\cdot 45^\circ$

$y'' = -4\sin(2x)$; $\quad y''(45^\circ) = -1 < 0$ Hochpunkt

$y''(135^\circ) = 4 > 0$ Tiefpunkt $\qquad$ usw.

$y(135^\circ) = 2\cdot½ - 1 = 0$

Die Tiefpunkte $((2k-1)\cdot 45^\circ / 0)$ liegen alle auf der x-Achse

b) Die beiden Geraden stehen senkrecht aufeinander, wie anhand der beiden gleichlangen Richtungsvektoren zu sehen ist, und schneiden im Punkt (0/1). Die Richtung der Winkelhalbierenden ergibt sich durch Addition der Richtungsvektoren von g und h:
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und die Gleichung der Winkelhalbierenden ist $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, oder in Koordinatenform $y = 3x + 1$. Der Mittelpunkt $M(u/v) = M(u/3u+1)$ hat vom Punkt P den Abstand r :
$r = \sqrt{(u-0)^2 + (3u + 1 - 9)^2} = \sqrt{10u^2 - 48u + 64}$. Die Entfernung vom Punkt (0/1) beträgt
$\sqrt{2}\cdot r = \sqrt{(u-0)^2 + (3u + 1 - 1)^2} = \sqrt{10u^2} = \sqrt{10}u$. Durch Einsetzen von $r = \sqrt{5}$ u und anschliessendes Quadrieren erhält man:
$5u^2 = 10u^2 - 48u + 64$. Die Lösungen der sich draus ergebenden quadratischen Ungleichung $5u^2 - 48u + 64$ sind $u = 1{,}6$ und $u = 8$.

Man erhält also zwei Kreise mit Mittelpunkten $M_1(1{,}6 / 5{,}8)$ und $M_2(8 / 25)$.