Kantonsschule Reussbühl Maturitätsprüfung 1999

Mathematik **Typus A/B**

Bemerkungen: Für jede Aufgabe soll eine neue Seite begonnen werden.
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.
Zeit: 3 Stunden.

1. Gegeben ist die Schar f_a von Funktionen mit dem reellen Parameter $a > 0$,

   $f_a:\ x \rightarrow f_a(x) = x \cdot e^{\left(-\frac{x}{a}+1\right)}$.

   a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Nullstelle, Extremalstelle und Wendestelle dieser Funktionen (nur die Abszisse).
   b) Beweisen Sie, dass der Winkel, unter dem die Graphen der Funktionen f_a die x-Achse schneiden, von a unabhängig ist. Wie gross ist dieser Winkel?
   c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_a mitsamt der Wendetangente für $a = 3$.
   d) Die Kurve f_a schliesst im 1. Quadranten mit der x-Achse und der Geraden u: $x = b$, $b > 0$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F(b)$ und den Grenzwert $\lim\limits_{b \to \infty} F(b)$.

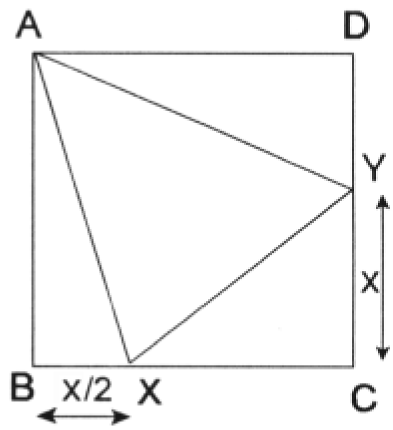
2. Pia hat zum Geburtstag ein Säcklein mit 26 Kugeln erhalten; auf jeder Kugel ist je ein Buchstabe des Alphabetes aufgeprägt. Pia zieht zufällig dreimal eine Kugel, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Pia die Buchstaben ihres Namens, wenn sie
   a) die Buchstaben in der Reihenfolge P, I, A ziehen muss?
   b) die Buchstaben nach dem Ziehen noch sortieren darf?
   c) Pia ziehe nun 500-mal gemäss b) je drei Kugeln. Die gezogenen drei Kugeln werden jeweils wieder zurückgelegt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens dreimal die drei Buchstaben ihres Namens gezogen hat?
   d) Wie oft muss Pia das Ziehen von je drei Kugeln gemäss b) wiederholen, wenn sie mit mehr als 55% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal alle Buchstaben ihres Namens ziehen will?
   e) Pia gibt ihren Gästen nun folgendes Spiel bekannt: Ein Spieler zieht gleichzeitig drei Kugeln aus dem Säcklein. Er gewinnt 15 Franken für jede Kugel, die einen Buchstaben des Namens PIA trägt und zahlt Pia zwei Franken für jeden falschen Buchstaben. Dann werden die Kugeln für den nächsten Spieler zurückgelegt. Wie gross ist der Erwartungswert dieses Spieles für Pia?

3. Lösen Sie die folgenden unabhängigen Teilaufgaben:

   a) Bestimmen Sie x im Intervall $[0, 2\pi[$: $\int_0^x (2\sin 2t - 3\sin t)\,dt = 0$

   b) Gegeben ist die Parabel mit Gleichung $y = 0.5x^2$ und der Punkt P(6/0). Berechnen Sie die Gleichung des kleinsten Kreises durch P, der die Parabel berührt.

4. In ein Quadrat der Seitenlänge s = 1 ist ein Dreieck AXY einbeschrieben gemäss der nebenstehenden Figur. Es sei $\overline{BX} = \frac{x}{2}$ und $\overline{CY} = x$.



   a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks als Funktion von x.
   b) Bestimmen Sie die Werte von x, für welche die Dreieckfläche halb so gross wird wie die Quadratfläche.
   c) Für welchen Wert von x ist die Dreieckfläche minimal?
   d) Sei $x = \frac{1}{3}$. Wie gross ist der Innenwinkel α bei A?
   e) Stellen Sie den Winkel $\delta = \angle$ XAB bei A und den Winkel $\varepsilon = \angle$ DAY bei A mit trigonometrischen Beziehungen in Abhängigkeit von x dar. Für welche x sind der Dreieckswinkel α bei A beziehungsweise die Summe $\delta + \varepsilon$ extremal, und wie gross sind diese extremalen Winkel α ?

5. Gegeben sind die Ebenen E: $x - 2y + 2z = 0$ und Δ: $x + y - z = 0$ sowie die Kugelschar mit Gleichung $(x - 11)^2 + (y - 13)^2 + (z - 12)^2 = r^2$ (Scharparameter r >0)

   a) E ist Tangentialebene einer Kugel der Schar. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M dieser Kugel, ihren Radius und den Berührpunkt B von E an.
   b) Wie heisst die Gleichung der Schnittgeraden s von E mit Δ ?
   c) Wie lautet die Gleichung derjenigen Kugeltangente t in B, die parallel zur Ebene Δ ist?
   d) M sei nun Spitze einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Je zwei Eckpunkte dieses Quadrates liegen auf s bzw. t. Berechnen Sie das Volumen einer solchen Pyramide.