Lösung der Aufgabe 1

a) Nullstelle: $x \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} = 0$: $\underline{x_0 = 0}$

Ableitungen: $f'(x) = 1 \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} - x \cdot (-\frac{1}{a}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} = (1 - \frac{x}{a}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)}$

$$f''(x) = (-\frac{1}{a}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} + (1 - \frac{x}{a}) \cdot (-\frac{1}{a}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} = (-\frac{2}{a} + \frac{x}{a^2}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{a^2} \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} + (-\frac{2}{a} + \frac{x}{a^2}) \cdot (-\frac{1}{a}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} = (\frac{3}{a^2} - \frac{x}{a^3}) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)}$$

f'(x) = 0: $1 - \frac{x}{a} = 0$: $\underline{x_1 = a}$ f''(a) = $-\frac{1}{a} \cdot e^0 < 0$: x_1 ist Stelle eines <u>Maximums</u>

f''(x) = 0: $-\frac{2}{a} + \frac{x}{a^2} = 0$: $\underline{x_2 = 2a}$ f'''(2a) = $\frac{1}{a^2} \cdot e^{-1} \neq 0$: x_2 ist <u>Wendestelle</u>

b) $f'(x_1) = (1 - \frac{0}{a}) \cdot e^{(-\frac{0}{a}+1)} = 1 \cdot e^1 = e$ unabhängig von a

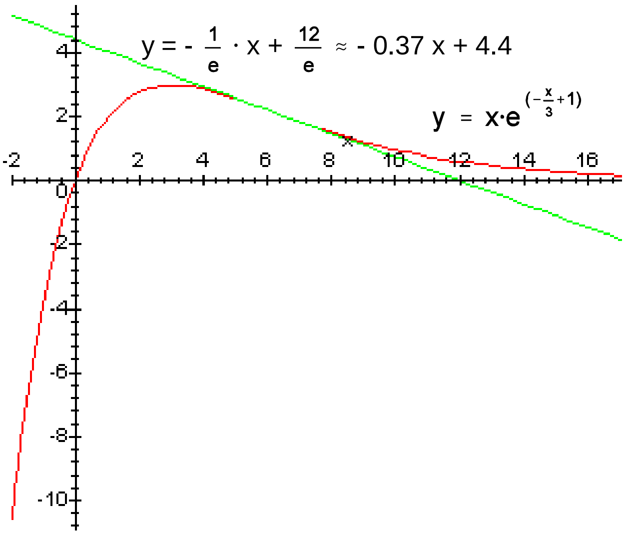
tan α = e ; <u>α = 69,80...°</u>

c) f'(2a) = - e^{-1}; f(2a) = 2a · e^{-1}

Ansatz für die Wendetangente: $y = -\frac{1}{e}x + q$

P(2a|2a · e^{-1}) einsetzen. $2a \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} 2a + q$ also $q = \frac{4a}{e}$

für a = 3: $y = -\frac{1}{e} \cdot x + \frac{12}{e} \approx -0.37x + 4.4$



d) $F = \int_0^b x \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} dx = x \cdot (-a) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} \Big|_0^b - \int_0^b 1 \cdot (-a) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} dx = -ab \cdot e^{(-\frac{b}{a}+1)} + a \cdot (-a) \cdot e^{(-\frac{x}{a}+1)} \Big|_0^b$

f(x) = x f'(x) = 1

g'(x) = $e^{(-\frac{x}{a}+1)}$ g(x) = -a · $e^{(-\frac{x}{a}+1)}$

$F(b) = -a \cdot (a+b) \cdot e^{(-\frac{b}{a}+1)} + a^2 \cdot e$

$\lim_{b \to \infty} F(b) = a^2 \cdot e$

Lösung der Aufgabe 2

a) $P(\text{“P”}\cap\text{“I”}\cap\text{“A”}) = \frac{1}{26}\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{15600}$

b) $P(\text{“PIA”}\cup\text{“PAI”}\cup\text{“IPA”}\cup\text{“IAP”}\cup\text{“API”}\cup\text{“AIP”}) = \frac{1}{2600}$

c) Einzelwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2600}$, $q = 1-p$
P_{500}(mindestens 3-mal PIA) = 1 - P(nie, einmal oder zweimal PIA) :

$P_{500}(0) = \binom{500}{0}\cdot\left(\frac{2599}{2600}\right)^{500} = 0{,}82502...$ $\qquad P_{500}(1) = \binom{500}{1}\cdot\left(\frac{1}{266}\right)\cdot\left(\frac{2599}{2600}\right)^{499} = 0{,}15871...$

$P_{500}(2) = \binom{500}{2}\cdot\left(\frac{1}{2600}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2599}{2600}\right)^{498} = 0{,}01523...$

Es folgt : P_{500}(mindestens 3-mal PIA) = $1 - [\,P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)\,] = 1 - 0{,}99897.. = 0{,}00102$

d) P(mindestens 1 mal “PIA”) = 1 - P(nie “PIA”) = $1 - \left(\frac{2599}{2600}\right)^{n} > 0{,}55$

$n\cdot\log(\frac{2599}{2600}) < \log(0{,}45)$ $\quad\Rightarrow n > 2075{,}7...$ PIA müsst das Ziehen 2076-mal wiederholen.

e) $P(3\text{ Buchstaben}) = \frac{3}{26}\cdot\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{24} = \frac{6}{15600}$

$P(2\text{ Buchstaben}) = \frac{3}{26}\cdot\frac{2}{25}\cdot\frac{23}{24}\cdot 3 = \frac{414}{15600}$

$P(1\text{ Buchstabe}) = \frac{3}{26}\cdot\frac{23}{25}\cdot\frac{22}{24}\cdot 3 = \frac{4554}{15600}$

$P(\text{kein Buchstabe}) = \frac{23}{26}\cdot\frac{22}{25}\cdot\frac{21}{24} = \frac{10626}{15600}$

Werte der Zufallsvariablen X : Gewinn für Pia in Franken

X	-45	-28	-11	6
P(X)	$\frac{6}{15600}$	$\frac{414}{15600}$	$\frac{4554}{15600}$	$\frac{10626}{15600}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = \frac{1}{15600}\cdot(6\cdot(-45) + 414\cdot(-28) + 4554\cdot(-11) + 10626\cdot 6) = \frac{3}{26} = 0{,}1154$
Pia erwartet einen Gewinn von 11,54 Rappen.

Lösung der Aufgabe 3

a) $\int_0^x (2\sin 2t - 3\sin t)dt = 0$

$\int_0^x (2\sin st - 3\sin t)dt = \left[-\cos 2t + 3\cos t\right]_0^x$ = - cos 2x + 3 cos x + 1 - 3 = 0

$-(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3\cos x - 2$	= 0	Umformung nach FoSa
$2\cos^2 x - 3\cos x + 1$	= 0	Faktorisieren
$(2\cos x - 1)\cdot(\cos x - 1)$	= 0	
cos x	= 1	dann ist x = 0
cos x	= ½	dann ist $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \frac{5\pi}{3}$

b) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Parabel P(6/0)

Der Mittelpunkt des (kleinsten) berührenden Kreises liegt auf der Normalen n zur Kurve durch P, senkrecht zur Tangente im Berührungspunkt $B(b/\frac{1}{2}b^2)$. B ist der zu P am nächsten gelegene Punkt der Parabel, also muss die Strecke d = $\overline{PB}$ minimal werden:

$d = \overline{PB} = \left|\begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2}b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b-6)^2 + (\frac{1}{2}b^2 - 0)^2}$. Die Strecke d ist minimal, wenn d^2 minimal ist : $d^2 = \frac{1}{4}b^4 + (b-6)^2$; $d^2{}' = b^3 + 2b - 12 = 0$ für b = 2 (“geratene” ganzzahlige Lösung). Aus geometrischen Gründen muss dies die einzige Lösung sein (Nachweis durch Polynomdivision möglich). Der Berührpunkt ist B(2/2), Mittelpunkt des Kreises = Mittelpunkt der Strecke PB : M(4|1)
Die Gleichung des Kreises lautet k: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$.

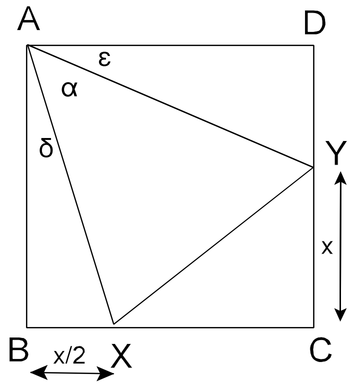
Lösung der Aufgabe 4

a) Δ ABX : $F_1 = 1 \cdot x/2 = x/4$; Δ XCY : $F_2 = ½ \cdot x \cdot (1 - x/2) = x/2 - x^2/4$;
Δ YDA : $F_3 = ½ \cdot (1-x) \cdot 1 = ½ - x/2$
Dreiecksfläche = Quadratfläche - $(F_1 + F_2 + F_3)$:
$\underline{F(x)} = 1 - x/4 - x/2 + x^2/4 - ½ + x/2 \underline{= ½ - x/4 + x^2/4}$

b) $F(x) = ½ : ½ - x/4 + x^2/4 = ½$, also $x^2/4 - x/4 = 0$, $\underline{x_1 = 0}$, $\underline{x_2 = 1}$
Die Flächen der Dreiecke ABC und ACD haben halbe Quadratfläche (!)

c) $F'(x) = -¼ + ½ \cdot x$; $F'(x) = 0$ für $x_3 = ½$, wobei $f''(½) > 0$ ist, x_1 ist Stelle eines Minimums.

d) Lösung mit Trigonometrie



$\tan \delta = x/2$, $\tan \varepsilon = 1-x$, $\tan \omega = x/(1-x/2)$

Für x = ⅓ folgt:

$\tan \delta = 1/6$; $\tan \varepsilon = 2/3$.

und $\delta = 9{,}46...^\circ$, $\varepsilon = 33{,}69...^\circ$,

$\underline{\alpha = 90^\circ - (\delta + \varepsilon) = 46{,}84...^\circ}$;

e) $\tan \delta = x/2$; $\tan \varepsilon = 1-x$, also $\delta = \arctan x/2$ und $\varepsilon = \arctan(1-x)$

$(\delta + \varepsilon)(x) = \arctan x/2 + \arctan(1-x)$

$$(\delta + \varepsilon)'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{2})^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{1 + (1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{2}{4 + x^2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

Nullstelle : $2 \cdot (x^2 - 2x + 2) - (4 + x^2) = 0$
$2x^2 - 4x + 4 - 4 - x^2 = 0$
$x^2 - 4x = 0$ $\underline{x_4 = 0}$ und $\underline{x_5 = 4}$
α ist minimal für x = 0 und maximal für x = 4; der zweite Wert ist ausserhalb des Definitionsbereiches [0,1] für x, also stellt x = 1 ein Randmaximum dar für dieses Extremalproblem.

Der Winkel beträgt für x = 0: $\delta = 0^\circ$, $\varepsilon = 45^\circ$, $\underline{\alpha = 45^\circ}$
und für x = 1: $\delta = 26{,}56...^\circ$, $\varepsilon = 0^\circ$, $\underline{\alpha = 63{,}43...^\circ}$

Lösung der Aufgabe 2d mit dem Skalarprodukt: Eckpunkte $A(0|1)$, $X(\frac{x}{2}|0)$ und $Y(1|x)$

Vektoren $\vec{AX} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AY} = \begin{pmatrix} 1 \\ x-1 \end{pmatrix}$ und $\vec{XY} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{2} \\ x \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ x-1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{x}{2})^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + (x-1)^2}}$$

Für x = ⅓ erhält man $\cos \alpha = \dfrac{-\frac{1}{6} + 1}{\sqrt{(\frac{1}{6})^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + (-\frac{2}{3})^2}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{37}{6}} \cdot \sqrt{\frac{13}{9}}} = \dfrac{15}{\sqrt{481}} = 0{,}68...$

Analog für den Winkel bei X

Lösung der Aufgabe 5

a) Mittelpunkt M der Kugel ist M(11|13|12); sein Abstand MP von einem beliebigen Punkt der Kugeloberfläche ist gleich dem Radius r, also ist

$$\overline{MP} = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x-11)^2 + (y-13)^2 + (z-12)^2} = r$$

Die Tangentialebene in B steht senkrecht zum Radius BM, d.h. die Normale n zur Ebene durch den Mittelpunkt M berührt die Kugel in B. Normalenvektor zur Ebene E ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, also ist

$n: \vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sie schneidet die Ebene E in B: (11+t)-2·(13-2t)+2·(12+2t) = 0

Man erhält t = -1 und, eingesetzt in die Gleichung von n, den Berührpunkt B(10/15/10).
Der Abstand BM ist gleich dem Radius r; er beträgt |BM| = 3.

b) 1.Punkt der Schnittgeraden : x = 0 : E: -2y + 2z = 0
Δ: y - z = 0 also y = z
1.Punkt der Schnittgeraden ist also z.B. A(0/1/1).
2. Punkt der Schnittgeraden : y = 0 : E : x + 2z = 0
Δ: x - z = 0 also z = 0 und x = 0
2. Punkt der Schnittgeraden ist B(0/0/0).

Die Schnittgerade s ist Gerade durch den Ursprung mit Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Die Tangente t durch B liegt natürlich in der Ebene E; da sie parallel zur Ebene Δ liegen muss, liegt sie auch parallel zur Schnittgeraden s von E mit Δ. Die Gleichung dieser Tangenten lautet demnach

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) Da t und s in der Tangentialebene E der Kugel liegen, ist die Höhe der Pyramide gleich dem Abstand des Mittelpunkts von der Ebene E, nämlich 3. Die Länge der Quadratseite a ergibt sich als Abstand der beiden Geraden t und s. Dazu schneidet man die Normalebene zu t durch B mit s; der Schnittpunkt S hat von B den gesuchten Abstand a:
Die Normalebene zu t durch B hat die Gleichung 0·x -1·y -1·z + const = 0, einsetzen der Koordinaten von B ergibt const = 25. Die Ebene -y - z + 25 = 0 schneiden mit s : -(-t) -(-t) + 25 = 0, t = -12,5, was den Punkt S(0|12,5|12,5) auf s ergibt. Es folgt

$$a = |\overrightarrow{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12{,}5 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ -2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{225}{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

Man erhält das Pyramidenvolumen : $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{225}{2} \cdot 3 = 112{,}5$.