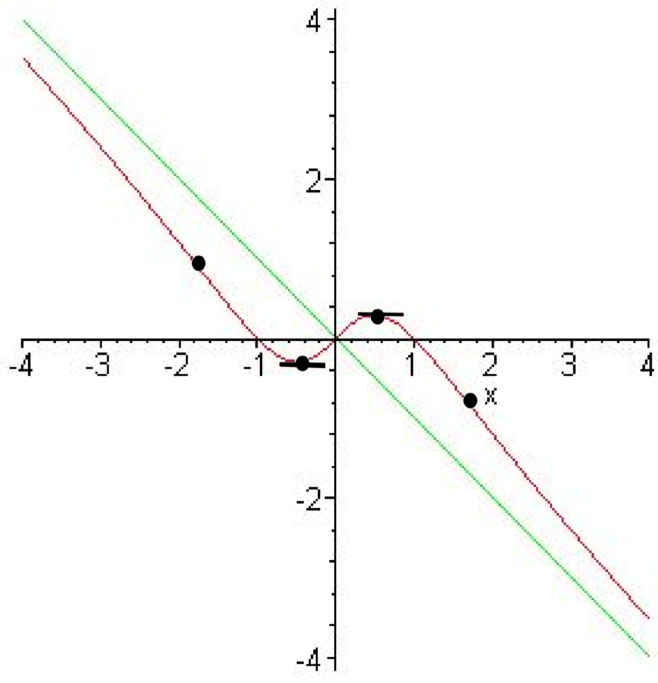
Lösung der Aufgabe 1

a) $f'(x) = \frac{-a \cdot x^4 - (1+3a)\cdot x^3 + 1}{(x^2+1)^2}$; $f'(1) = \frac{-a-1-3a+1}{2^2} = -a = 2$ für $\underline{a = -2}$

b) $f(x) = \frac{x - x^3}{x^2+1} = x \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} = x \cdot \frac{(1-x)\cdot(1+x)}{1+x^2}$

$D = \mathbb{R}$
Nullstellen f(x) = 0 für x = 0, x = 1 und x = -1
Wegen x^1 als Faktor einer geraden Funktion mit lauter quadratischen Termen in x ist die Funktion f ungerade, d.h. punktsymmetrisch bezüglich dem Ursprung : f(x) = - f(-x).
Die Polynomdivison liefert $(-x^3 + x) : (x^2 + 1) = -x + \frac{2x}{x^2+1}$; Asymptote ist demnach die Gerade mit der Gleichung $\underline{y = -x}$, weil der zweite Summand für grosse |x| verschwindet.

Extremalstellen : $f'(x) = -\frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$; f'(x) = 0, wenn $x^4+4x^2-1 = 0$ (biquadratische Gleichung)
Lösungen sind $x = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2} = \pm 0{,}4858....$ Aus Gründen des asymptotischen Verhaltens und aus Symmetriegründen ist der negative Wert eine Minimalstelle, der positive Wert eine Maximalstelle : Minimum(-0,4858.../-0,3002...); Maximum(0,4858.../0,3002...).
Wendepunkte : $f''(x) = 4x \cdot \frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}$; es ist f''(x) = 0 für x = 0 und für $x = \pm\sqrt{3}$. Die Wendepunkte sind $(\mp\sqrt{3} / \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.



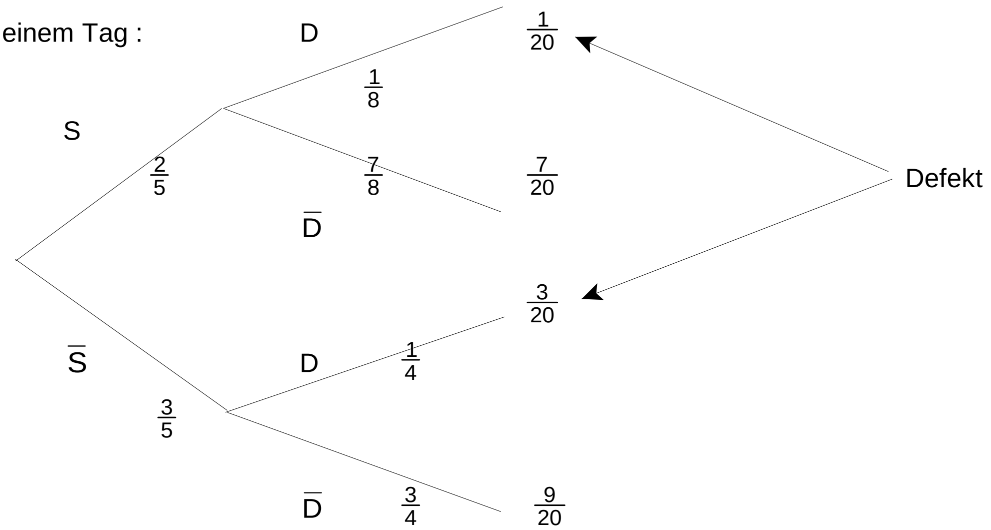
c) Im Punkt mit dem grössten Abstand ist die Steigung des Graphen -1 (Parallele zur Asymptoten).
Also ist $f'(x) = -\frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2} = -1$. Man erhält $x^4+4x^2-1 = (x^2+1)^2$ und daraus die quadratische Gleichung $x^2 = 1$.Die Punkte des Graphen, die den grössten Abstand haben, sind demnach (-1/0) und (1/0).

Lösung der Aufgabe 2

P("Schönes Wetter") = P(S) = $\frac{2}{5}$; P("schlechtes Wetter") = P($\overline{S}$) = $\frac{3}{5}$

P("Defekt") = P(D); P(D|S) = $\frac{1}{8}$;P($\overline{D}$ |S) = $\frac{7}{8}$; P($\overline{D}$ |S) = $\frac{3}{4}$; P(D|$\overline{S}$) = $\frac{1}{4}$;

an einem Tag :



a) $P(D) = P(D \cap S \cup D \cap \overline{S}) = P(S) \cdot P(D|S) + P(\overline{S}) \cdot P(D|\overline{S}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

b) P(höchstens ein Defekt pro Woche) = P(0 D ∪ 1 D) = P(0 D) + P(1 D)

$$P(0\ D) = \binom{5}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}; \quad P(1\ D) = \binom{5}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^4 = \frac{1280}{3125}$$

P(höchstens ein Defekt pro Woche) = $\frac{1024}{3125} + \frac{1280}{3125} = \frac{2304}{3525}$

c) $P(\overline{D} \cap S) = P(S) \cdot P(\overline{D}|S) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{20}$; P(5 mal kein Defekt bei schönem Wetter) = $\left(\frac{7}{20}\right)^5$

d) $P(D \cap \overline{S}) = P(D) \cdot P(\overline{S}|D)$, also $P(\overline{S}|D) = \dfrac{P(D \cap \overline{S})}{P(D)} = \dfrac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$

e) $P(2\ D) = \binom{5}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^3 = \frac{640}{3125}$

$P(3\ D) = \binom{5}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 = \frac{160}{3125}$

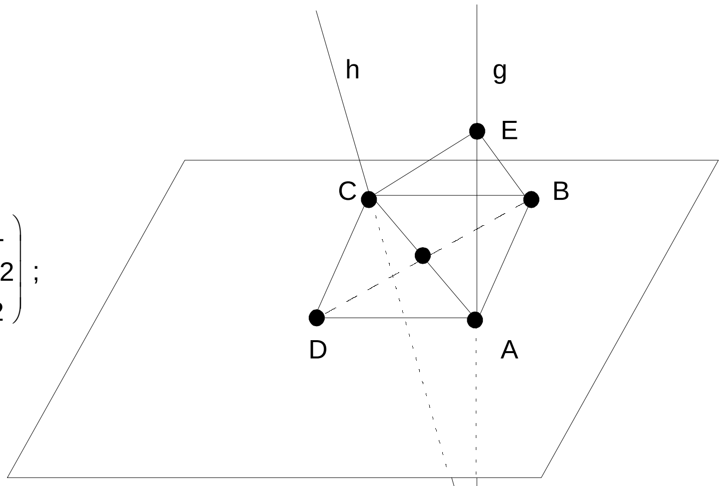
$P(4\ D) = \binom{5}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^1 = \frac{20}{3125}$

$P(5\ D) = \binom{5}{5} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{3125}$

X : Beitrag für die Klassenkasse, Werte der Zufallsvariablen sind 1, 3, 6, 10 und 15

$\mu = P(X) = 1 \cdot P(1\ D) + 3 \cdot P(2\ D) + 6 \cdot P(3\ D) + 10 \cdot P(4\ D) + 5 \cdot P(5\ D) = \frac{4375}{3125} = \frac{7}{5} = 1{,}40$

Lösung der Aufgabe 3



a) Gleichung von g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

die Gleichung der Normalebene N zu g ist $1 \cdot x + (-2) \cdot y + 2 \cdot z + \text{const} = 0$; für $A \in N$ gilt :
$16 + (-2) \cdot (-10) + 2 \cdot (-3) + \text{const} = 0$, const = - 30.
Die Gleichung der Ebene N lautet also : $\underline{x - 2y + 2z - 30 = 0}$

b) Das kleinste Quadrat ergibt sich, wenn der Durchstosspunkt von h mit N als Ecke C gewählt wird; AC ist dann Diagonale des Quadrats.
Die Gerade h durchstösst die Ebene N : $(1+t) - 2 \cdot (2) + 2 \cdot (3-2t) - 30 = 0$ ergibt t = -9 und den Durchstosspunkt C(-8/2/21). Die Diagonale hat die Länge $|\vec{AC}| = \left\| \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -24 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{576 + 144 + 576} = 36$, die Quadratseite hat demnach die Länge $s = \dfrac{36}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}$. Der Mittelpunkt des Quadrats ist M(4/-4/9).

“Geometrische” Lösung für die Koordinaten des Punktes B (und D) :

Der Vektor $\vec{MB}$ ste$\overline{S}$ht senkrecht zur Ebene, die durch g und einen zum Vektor $\vec{AC}$ kollinearen aufgespannt wird, ist also Normalenvektor dieser Ebene mit der Länge 18. Die Ebene hat die Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $2x + 2y + z - 9 = 0$. Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Länge 3 und ist kollinear zum Vektor $\vec{MB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit der Länge 18. Man erhält die Ortsvektoren von B$\overline{D}$ durch Addition bzw. Subtraktion dieses Vektors und des Ortsvektors von M :

B(16 / 8 / 15) und D(-8 / -16 / 3).

“Algebraische” Lösung für die Koordinaten des Punktes B (und D) :

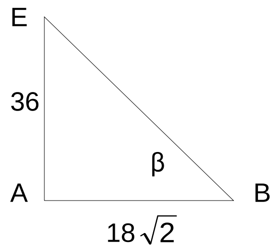
$B(x/y/z) \in N$	:	$x - 2y + 2z - 30 = 0$
$\lvert\vec{AB}\rvert = s$	:	$(x-16)^2 + (y+10)^2 + (z+3)^2 = 648$
$\lvert\vec{CB}\rvert = s$	:	$(x+8)^2 + (y-2)^2 + (z-21)^2 = 648$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert ebenfalls die oben gefundenen Koordinaten des Punktes B. Für den Punkt D muss ein entsprechendes Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden.

---

c) Der Vektor von A nach E ist kollinear zum Richtungsvektor von g und muss die Länge 36 haben : $\left| t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right| = 36$: $9t^2 = 1296$, $t = \pm 12$. Man erhält E [eine Lösung] : $\vec{r}_E = \vec{r}_A + 12\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\14\\9\end{pmatrix}$, also den Punkt E(40 / 14 / 9) [die zweite Lösung ist F(-8 / -34 / -15)]

d) BE steht senkrecht auf der Spur (BC) der Ebene BCE; der gesuchte Winkel β liegt im Dreieck ABE bei B : $\tan\beta = \dfrac{36}{18\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. $\beta = 54{,}7...^\circ$



Lösung der Aufgabe 4

Kreis und Parabel liegen symmetrisch zur x-Achse. Gleichung des oberen Halbkreises $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Die y-Koordinate des Berührpunkts ist $f(r\tfrac{r}{2}) = \dfrac{r}{2}\sqrt{3}$. Die Steigung der Tangente an den Kreis ist

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\cdot(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, im Berührpunkt $f'(\tfrac{r}{2}) = -\dfrac{\frac{r}{2}}{\sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

a) Die obere Hälfte der Parabel hat die Gleichung $g(x) = c\cdot\sqrt{d - x}$, im Berührpunkt ist der y-Wert $g(\tfrac{r}{2}) = c\cdot\sqrt{d - \tfrac{r}{2}}$. Die Steigung der Parabel beträgt $g'(x) = \dfrac{c}{2\sqrt{d - x}}\cdot(-1)$ und im Berührpunkt

$g'(\tfrac{r}{2}) = -\dfrac{c}{2\sqrt{d - \frac{r}{2}}}$.

Man erhält die beiden Gleichungen für die y-Koordinaten und die Steigung :

$$\tfrac{r}{2}\sqrt{3} = c\sqrt{d - \tfrac{r}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2\sqrt{d - \frac{r}{2}}}$$

Aus der 2.Gleichung c isolieren und in der 1.Gleichung einsetzen: $\tfrac{r}{2}\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{d - \frac{r}{2}}}{\sqrt{3}}\sqrt{d - \tfrac{r}{2}}$ ergibt

$d = \tfrac{5}{4}r$ und $c = \sqrt{r}$. Die Gleichung der Parabel lautet $y = \pm\sqrt{r}\sqrt{\tfrac{5}{4}r - x}$; Schnittpunkt mit der x-Achse ist bei $x = \tfrac{5}{4}r$

b) $V_K = \pi\displaystyle\int_{-r}^{\frac{r}{2}}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{\frac{r}{2}} = \frac{9}{8}r^3\pi$

c) $V_P = \pi r\displaystyle\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{5}{4}r}\left(\sqrt{\tfrac{5}{4}r - x}\right)^2 dx = \pi r\left[\frac{5}{4}rx - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{r}{2}}^{\frac{5}{4}r} = \frac{9}{32}r^3\pi$

d) Länge = $r + \tfrac{5}{4}r = \tfrac{9}{4}r = 6$; dies ergibt den Radius $r = \tfrac{8}{3}$ und die Volumina $V_K = \tfrac{64}{3}\pi$ und $V_P = \tfrac{16}{3}\pi$.

Lösung der Aufgabe 5

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$ Faktorisieren : $(2\cos x - 1)\cdot(\cos x + 1) > 0$

Beide Faktoren positiv : cos x > ½ und cos x > -1; dies trifft zu (siehe Cosinuskurve) für $0^\circ < x < \frac{\pi}{3}$ und $x > \frac{5\pi}{3}$.

BeideFaktoren negativ : cos x < ½ und cos x < -1 ergeben keine Lösung

b) $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2}\cdot(-\frac{1}{x})\,dx = -\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2) + 2\cdot\int\frac{1}{1+x^2}\,dx$

mit $f(x) = \ln(1+x^2)$ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\cdot(2x)$

und $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ $g(x) = -\frac{1}{x}$

Das letzte Integral ist bekannt (Formelsammlung !) als arctan x.

c) 1.Gleichung : $3^2 \cdot 3^{x-3} = 3^{2\cdot(y-1)}$ vereinfacht $3^x = 3^{2y-2}$ oder $x = 2y - 2$
2.Gleichung : $2^{2\cdot(x-3)} = 2^2 \cdot 2^{y-3}$ vereinfacht $2^{2x-6} = 2^{y-1}$ oder $2x - 3 = y - 1$
x in die 2.Gleichung einsetzen : $2\cdot(y-2) - 6 = y - 1$. Man erhält y = 3, x = 4.