Lösung der Aufgabe 1:

a) Nullstelle von f: $2\cdot(2x-1)\cdot e^{-x} = 0$ Nullstelle ist nur für $x = ½$

Asymptote: Die Funktion hat die x-Achse als Asymptote.

1.Ableitung von f: $y' = 4\cdot e^{-x} - 2(2x-1)\cdot e^{-x} = 2e^{-x}\cdot(3 - 2x)$

Nullstelle der 1.Ableitung: $x = 3/2$

2. Ableitung: von f: $y'' = -2e^{-x}\cdot(3-2x) + 2e^{-x}(-2) = -2e^{-x}\cdot(3-2x+2) = -2e^{-x}\cdot(5-2x)$

Nullstelle der 2.Ableitung : $x = 5/2$

$f''(3/2) = -2e^{-3/2}\cdot ½ / (3/2) < 0$: f hat bei 3/2 ein Maximum $(3/2 \mid 4\cdot e^{-3/2})$

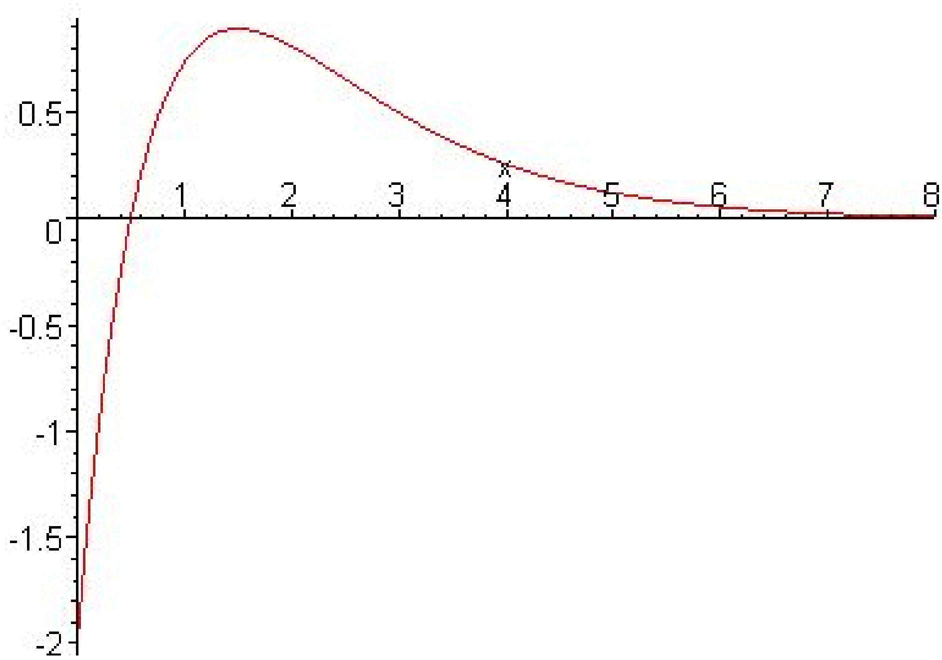
Wendepunkt ist $(5/2 \mid 8\cdot e^{-5/2}) \approx (2.5 \mid 0.66)$

Wendetangente :Ansatz $y = mx + q$

Die Steigung der Wendetangente ist bei $x = 5/2$ $f'(5/2) = 2e^{-5/2}\cdot(-2) = m$

Die Tangente geht durch den Wendepunkt : $8\cdot e^{-5/2} = -4e^{-5/2}\cdot 5/2 + q$, also $q = 18\cdot e^{-5/2}$

Tangentengleichung : $y = -4e^{-5/2}\cdot x + 18\cdot e^{-5/2} \approx -0.33\cdot x + 1.48$



b) $2\cdot\int (2x-1)\cdot e^{-x}\,dx = 2\,[-(2x-1)\cdot e^{-x} - \int 2(-e^{-x})\,dx] = 2\,[-(2x-1)\,e^{-x} - 2e^{-x}]$

$= -4x\,e^{-x} + 2\,e^{-x} - 4\,e^{-x} = -4x\,e^{-x} - 2\,e^{-x}$

Bestimmtes Integral : $-4e^{-1} - 2e^{-1} - (0 - 2e^{0}) = -6/e + 2 \approx -0.21$

Es handelt sich um eine Flächendifferenz; der negative Teil überwiegt.

Lösung der Aufgabe 2:

a) Lösung mit der Abstandsformel :

Abstand des Punktes Q von der Geraden g mit Anfangspunkt P : d = $\dfrac{\left|\vec{PQ}\times\vec{a}\right|}{a}$.

mit $\vec{PQ}\times\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-33\\15\end{pmatrix}$ folgt d = $\dfrac{27\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 9$

b) Zwischenwinkel aus cos α = $\dfrac{\vec{QP}\cdot\vec{a}}{\left|QP\right|\cdot a}$.

Anfangspunkt hat t = 0: $\vec{QP}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-9\end{pmatrix}$; cos α = $\dfrac{12-3+9}{\sqrt{99}\cdot\sqrt{18}} = \sqrt{2/11}$

α = 64.760598... °

t = 2: $\vec{QP}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-7\end{pmatrix}$; cos α = $\dfrac{-20-5+7}{\sqrt{99}\cdot\sqrt{18}} = -\sqrt{2/11}$, α = 115,23940... ° .

Die beiden Winkel ergänzen sich zu 180° (die Punkte müssen symmetrisch liegen).

c) Natürlich für den Fusspunkt des Lotes von Q auf g.
Dazu muss die Normalebene durch Q auf g mit g geschnitten werden :
Normalebene 4x + y - z + D = 0 enthält Q: 4·4 + 2 - (-8) + D = 0, es folgt D = -26
Normalebene 4x + y - z - 26 = 0 schneiden mit g :
4(1+4t) + (5 + t) - (1-t) - 26 = 4 + 16t + 5 + t - 1 + t - 26 = 18t - 18 = 0
t = 1 : F(5|6|0).

Alternative, aber gleichwertige Lösung für die Teile a) und c):
in a) wird die Normalebene zu g durch Q mit g geschnitten; man erhält den Fusspunkt F des Lotes von Q auf g (Ergebnis des Aufgabenteils c). Der Abstand ist gleich der Länge der Strecke QF .

Lösung der Aufgabe 3 :

a) Beweis durch vollständig Induktion
Verankerung (Induktionsanfang) n = 1 : $s_1 = 1\cdot 2 = (1-1)\cdot 2^2 + 2 = 0 + 2$ wahr
Schluss von n auf n+1 (Induktionsschritt) :
Annahme der Richtigkeit für n : $s_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + n\cdot 2^n = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$
Anwendung für n + 1 :

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= \underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + n\cdot 2^n}_{} + (n+1)\cdot 2^{n+1} = \\
&= (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1)\cdot 2^{n+1} = \\
&= n\cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + n\cdot 2^{n+1} + n\cdot 2^{n+1} = \\
&= 2n\cdot 2^{n+1} + 2 = \\
&= n\cdot 2^1\cdot 2^{n+1} + 2 = n\cdot 2^{n+2} + 2
\end{aligned}$$

Vervollständigung ✔

b) lg(2) + 2 · lg(x) = lg(x + 2.8) + 1 = lg (x + 2.8) + lg(10)
lg $(2x^2)$ = lg(10x + 28) oder $2x^2 = 10x + 28$
Die äquivalente quadratische Gleichung $x^2 - 5x - 14 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -2$

Weil $x_2 = -2$ nicht im Definitionsbereich der gegebenen Gleichung liegt, ist x = 7 einzige Lösung.

c) Schnittpunkte : sin x = cos 2x = 1 - 2 $\sin^2 x$ oder $2\cdot \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\sin x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1\pm 3}{4}$, d.h. sin x = - 1, Schnittpunkt $S_1(-\frac{\pi}{2} \,|\, -1)$

sin x = ½, Schnittpunkt $S_2(-\frac{\pi}{6} \,|\, \frac{1}{2})$

Flächeninhalt :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \sin x)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{5}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3}{4}\sqrt{3} = -1{,}299...$$

Lösung der Aufgabe 4 :

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schülerin ein Amt erhält (d.h. ein Klassenmitglied eine Schülerin ist, beträgt P(♀) = $\frac{18}{27}$ = ⅔, für einen Schüler beträgt sie P(♂) = ⅓ . Die Wahrscheinlichkeit ist für ein zweites, drittes, viertes oder fünftes Amt konstant (man wählt stets aus allen Klassenmitgliedern aus), die Zufallsgrösse Z ist binomial verteilt.

$P(Z=0) = \binom{5}{0}(1/3)^5 = \frac{1}{243} = 0.0041...$

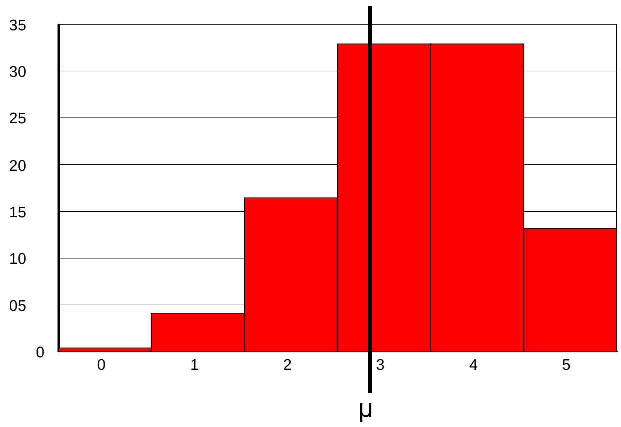
$P(Z=1) = \binom{5}{1}\cdot(2/3)\cdot(1/3)^4 = 5\cdot\frac{2}{243} = \frac{10}{243} = 0.0411...$

$P(Z=2) = \binom{5}{2}\cdot(2/3)^2\cdot(1/3)^3 = 10\cdot\frac{4}{243} = \frac{40}{243} = 0.1646...$

$P(Z=3) = \binom{5}{3}\cdot(2/3)^3\cdot(1/3)^2 = 10\cdot\frac{8}{243} = \frac{80}{243} = 0.3292...$

$P(Z=4) = \binom{5}{4}\cdot(2/3)^4\cdot(1/3) = 5\cdot\frac{16}{243} = \frac{80}{243} = 0.3292...$

$P(Z=5) = \binom{5}{5}\cdot(2/3)^5 = 1\cdot\frac{32}{243} = 0.1316...$



Erwartungswert $\mu = 0\cdot P(0) + 1\cdot P(1) +$

$+\ 2\cdot P(2) + 3\cdot P(3) + 4\cdot P(4) + 5\cdot P(5) =$

$= \dfrac{0\cdot 1 + 1\cdot 10 + 2\cdot 40 + 3\cdot 80 + 4\cdot 80 + 5\cdot 32}{243} =$

$= \frac{810}{243} = \frac{10}{3} = 3.3...$

Es werden im Mittel etwas mehr als 3 Ämter durch Mädchen besetzt.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass drei 3 Ämter durch Schülerinnen, 2 durch Schüler besetzt werden, ist P(Z=3) = 0.3292..., die Wahrscheinlichkeit, dass alle Ämter durch Mädchen besetzt werden, ist P(Z=5) = 0.1316... :
$P(A) = 10 \cdot (2/3)^3 \cdot (1/3)^2 = 0.3292...$
$P(B) = (2/3)^5 = 0.1316...$ Es ist $P(A) > P(B)$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Klassenmitglied eine Schülerin ist (d.h. ein Amt durch eine Schülerin besetzt wird), sei w, für einen Schüler 1-w. Dann ist
$P(A) = 10 \cdot w^3 \cdot (1 - w)^2$
$P(B) = w^5$

d) P(B) > P(A) : $w^5 > 10 \cdot w^3 \cdot (1 - w)^2 \quad |: w^3$

$$w^2 > 10 \cdot (1 - w)^2$$
$$9w^2 - 20w + 10 < 0$$

Die zugehörige Gleichung hat die Lösungen $w = \dfrac{10 \pm \sqrt{10}}{9} = \left\langle \begin{array}{l} 1.4624... \\ 0.7597... \end{array} \right.$

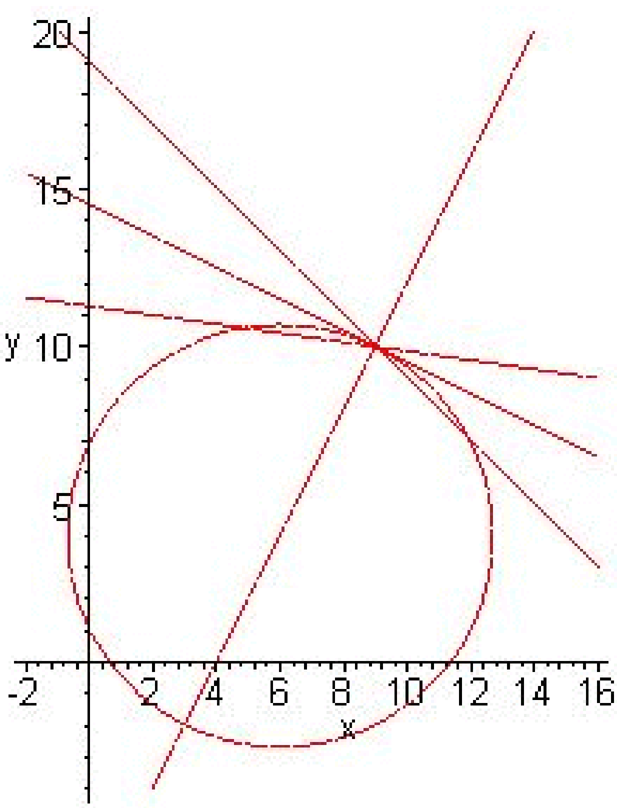
Lösung der Ungleichung : { w | 0.750... < w < 1.46... }
Von den Lösungen kommen als Werte einer Wahrscheinlichkeit nur diejenigen ≤ 1 in Betracht.
Es müssen also mehr als 76% der Klassenmitglieder Mädchen sein, d.h. 21 Schülerinnen oder mehr.

[Kontrolle mit 21 Schülerinnen : $P(A) = \binom{5}{3} \cdot (7/9)^3 \cdot (2/9)^2 = 10 \cdot 1372/59049 = 0.2323...$

$P(B) = 0.2846...$]

Lösung der Aufgabe 5 :

a)



b) Der Lichtstrahl hat die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Die Gerade durch die Punkte P und Q hat die Gleichung y = mx + q mit m = -1
Da P auf dieser Geraden liegt, gilt : 20 = (-1)·(-1) + q; es folgt q = 19

"Licht"-Gerade y = -x + 19, schneidet den Kreis

$$\begin{aligned} (x - 6)^2 + (-x + 19 - 4)^2 &= 45 \\ (x - 6)^2 + (-x + 15)^2 &= 45 \\ 2x^2 - 42x + 216 &= 0 \\ x^2 - 21x + 108 &= 0 \end{aligned}$$

Der Lichtstrahl trifft in den Punkten mit x = 9 und x = 12
Der Auftreffpunkt ist R(9|10).

c) Tangente an den Kreis durch R Ansatz y = mx + q

Die Tangente ist senkrecht zur Richtung von M nach R : $\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, Steigung m = -½

Tangente y = -½ ·x + q durch R: 10 = -½ · 9 + q; q = 14,5
Tangente y = -½ ·x + 14,5

d) Winkel zwischen der Richtung der Lichtgeraden $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Normalen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verdoppeln:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$; α = 108,43..° bzw. 71.56...°.

Der gesuchte Winkel beträgt 143,13... °.