KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

Maturitätsprüfungen 2001
(Gä, Sw, We)

M a t h e m a t i k   Typus A/B

Bemerkungen :   Zeit : Drei Stunden
Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $y = 2 \cdot (2x-1) \cdot e^{-x}$.
   a) Bestimme Nullstelle, Asymptote, Extremum, Wendepunkt und Wendetangente von f und zeichne den Graphen von f mit der Wendetangente im Intervall [0,8].
   b) Bestimme das Integral der Funktion f im Intervall [0,1] und interpretiere das Resultat geometrisch.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt Q(4|2|-8) und die Gerade g durch die Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben.
   a) Weise nach, dass Q nicht auf g liegt und ermittle den Abstand des Punktes Q von der Geraden g.

   Der Vektor $\overrightarrow{QP}$ vom Punkt Q zu einem beliebigen Punkt P auf der Geraden g bildet mit dem Richtungsvektor der Geraden g einen Winkel α. Bestimme diesen Winkel
   b) für den Anfangspunkt der Geraden g und für den Punkt mit t = 2 .
   c) Für welchen Punkt P ist $\alpha = 90°$?

3. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben

   a) Beweise, dass die Summenformel

   $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

   für alle natürlichen Zahlen n gilt.

   b) Bestimme x aus der Gleichung $\log_{10}(2) + 2 \cdot \log_{10}(x) = \log_{10}(x + 2.8) + 1$.

   c) Die Kurven der beiden Funktionen f_1 mit der Gleichung y = sin x und f_2 mit der Gleichung y = cos 2x haben im Bereich $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ zwei Schnittpunkte. Berechne die Fläche, die von den beiden Kurven zwischen diesen Schnittpunkten eingeschlossen wird.

4. Eine Klasse besteht aus 18 Schülerinnen und 9 Schülern. In der Klasse sind fünf Klassenämter zu verteilen, wobei die Verantwortlichen für die Ämter durch das Los ermittelt werden; ein Klassenmitglied kann also auch mehrere Aufgaben erhalten. Die Zufallsgrösse X beschreibt die Anzahl der Aufgaben, die durch diesen Losentscheid auf Schülerinnen entfallen.
   a) Berechne die Verteilung der Zufallsgrösse X, d.h. die Wahrscheinlichkeit dass 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 Schülerinnen ein Amt erhalten, und stelle graphisch dar, wie die Zufallsgrösse X verteilt ist. Wie gross ist der Erwartungswert ?
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse A und B :
      Ereignis A: zwei von den fünf Ämtern werden durch Schüler übernommen, drei durch Schülerinnen.
      Ereignis B: alle fünf Ämter werden von Schülerinnen übernommen.
   c) Bevor die Schülerinnen und Schüler auf die Klassen verteilt wurden, war die Klassengrösse dieser Klasse mit 27 Mitgliedern bereits festgelegt, die Verteilung der Schülerinnen und Schüler aber noch nicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Klassenmitglied eine Schülerin ist, sei mit w bezeichnet.
      Berechne die in b) festgelegten Ereignisse A und B für allgemeines w.
   d) Wie gross muss die Wahrscheinlichkeit w für eine Schülerin in einer Klasse mit 27 Klassenmitgliedern sein, wenn P(B) > P(A) sein soll, wobei A und B die unter b) beschriebenen Ereignisse sind.

5. Ein Kreis k mit der Gleichung $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 45$ ist gegeben. Von $P(-1|20)$ aus geht ein Lichtstrahl in Richtung $Q(4|15)$ und wird dann am Kreis k reflektiert.
   a) Stelle die Situation in einer sauberen Zeichnung dar.
   b) Rechne : in welchem Punkt R trifft der einfallende Lichtstrahl den Kreis ?
   c) Welche Koordinatengleichung hat die Tangente an den Kreis k durch R ?
   d) Wie gross ist der Winkel zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Lichtstrahl ?