KANTONSSCHULE REUSSBÜHL

Maturitätsprüfungen 2002
(An, Es, We)

Mathematik Typus A/B

Bemerkungen: Zeit: Drei Stunden
Jede Aufgabe soll auf einer neuen Seite begonnen werden.
Die vollständige und korrekte Lösung jeder der 5 Aufgaben wird mit 10 Punkten bewertet. Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{1}{18}x^3 - x^2 + \frac{9}{2}x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extremalpunkte, Wendepunkt) und zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Funktion im Bereich $-1 < x < 12$. (Längeneinheit 1 cm)

b) Die y-Achse, die Wendetangente und die Verbindungsgerade des Wendepunktes mit dem Ursprung bilden ein Dreieck. Zeigen Sie, dass dieses Dreieck durch den Graphen von f in zwei inhaltsgleiche Flächen zerlegt wird.

c) Die Normale im Wendepunkt W schneidet die y-Achse in V. Die Parallele zur x-Achse durch V und die Parallele zur y-Achse durch W bilden mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Berechnen Sie den Umfang dieses Rechtecks.

2. Gegeben ist die Funktion $f: y = \dfrac{x^2 + a}{x^2}, a > 0$.

a) Skizzieren Sie für $a = 2$ den Graphen zusammen mit den Asymptoten im Bereich $-5 < x < 5$.

b) Berechnen Sie (wieder für $a = 2$) den Inhalt der Fläche $A(b)$ in Abhängigkeit von b, die begrenzt wird vom Graphen der Funktion, von der x-Achse und von den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ bzw. $x = b$ $(b > 1)$. Untersuchen Sie $\lim\limits_{b \to \infty} A(b)$.

c) Die Tangente im Kurvenpunkt $P(2/y_P)$ bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie a so, dass dieses Dreieck extremalen Flächeninhalt hat.

d) Ist dies ein Minimum oder ein Maximum? Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

3. Eine Kugel k ist durch ihren Durchmesser $A(-1/-6/8)$ $S(7/2/-6)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Kugel.

b) Die Punkte A, $B(3/-2/10)$ und $C(7/-1/9)$ spannen die Ebene E auf. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E und dem Kugeldurchmesser AS.

d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$.

e) Die Kugel k schneidet die Ebene E in einem Kreis. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

4.1 Die drei Kanonen A, B und C einer Stellung haben die Trefferwahrscheinlichkeiten $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{3}{20}, P(C)=\frac{1}{10}$. Bei einer Salve dieser Stellung wird aus allen drei Kanonen je ein Schuss abgefeuert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim Abschuss einer Salve das Ziel genau zweimal – also von zwei der drei Kanonen – getroffen wird.

b) X ist die Anzahl Treffer bei einer Salve. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X und den Erwartungswert von X.

c) Nach dem Abfeuern einer Salve wurde das Ziel getroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Kanone B einen Treffer gelandet?

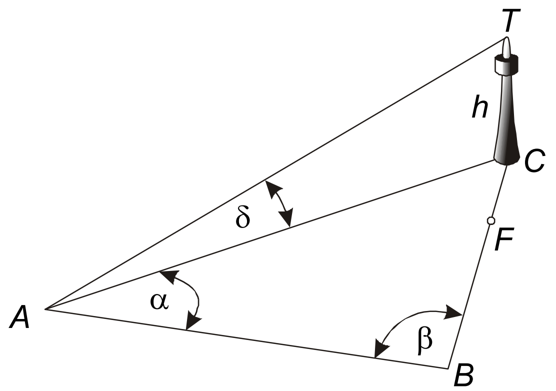
4.2 Beim Roulettespiel bleibt die Kugel auf einem der 37 Felder (mit den Nummern 0, 1, ..., 36) stehen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in zehn aufeinanderfolgenden Spielrunden die Kugel mindestens einmal im Feld 13 stehen bleibt.

b) Wie viele Runden müssen durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel mindestens einmal im Feld 13 stehen bleibt, größer als 90% ist?

c) Spieler Adam setzt immer auf eine bestimmte Reihe, nämlich diejenige mit den drei Zahlen 13, 14 und 15. Wenn also die Kugel in einem dieser drei Felder stehen bleibt, hat er gewonnen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Adam so in 20 Spielrunden mindestens dreimal gewinnt.

5.1



Gegeben: $\alpha = 48.7^0$ $\beta = 77.2^0$ $\delta = 6.20^0$ $\left|\overline{AB}\right| = 420$ m

Auf einer dem Festland vorgelagerten Insel im Meer steht ein Leuchtturm der Höhe $h=\overline{CT}$ (vgl. nebenstehende Figur). Um die Turmhöhe zu bestimmen, ist am Strand eine Standlinie $\overline{AB}$ abgesteckt. Die Winkel α, β und der Höhenwinkel δ werden gemessen. Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene senkrecht zum Turm.

a) Berechnen Sie die Höhe h des Leuchtturms.

b) Ein Schiff sendet an der Stelle $F \in BC$ ein Nebelhornsignal aus, das in der Turmspitze T genau 1.00 s später empfangen wird. (Schallgeschwindigkeit 344 m/s). Wie weit war das Schiff zu diesem Zeitpunkt von C bzw. A entfernt? Berechnen Sie diese beiden Abstände.

5.2 Gegeben sind zwei Funktionen durch folgende Zuordnungen:

$$f: x \to y = f(x) = 2\sin^2 x \qquad g: x \to y = g(x) = 3\cos x$$

a) Berechnen Sie im Bereich $0 \le x \le \pi$ den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel der Graphen der beiden Funktionen.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die Graphen der beiden Funktionen zwischen der y-Achse und dem in Teilaufgabe a) berechneten Schnittpunkt einschließen.