Lösung Nr 1

$y = 0$ für $x<0$ und $y = 2x\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}$ für $x \geq 0$. Sei also nun $x \geq 0$.

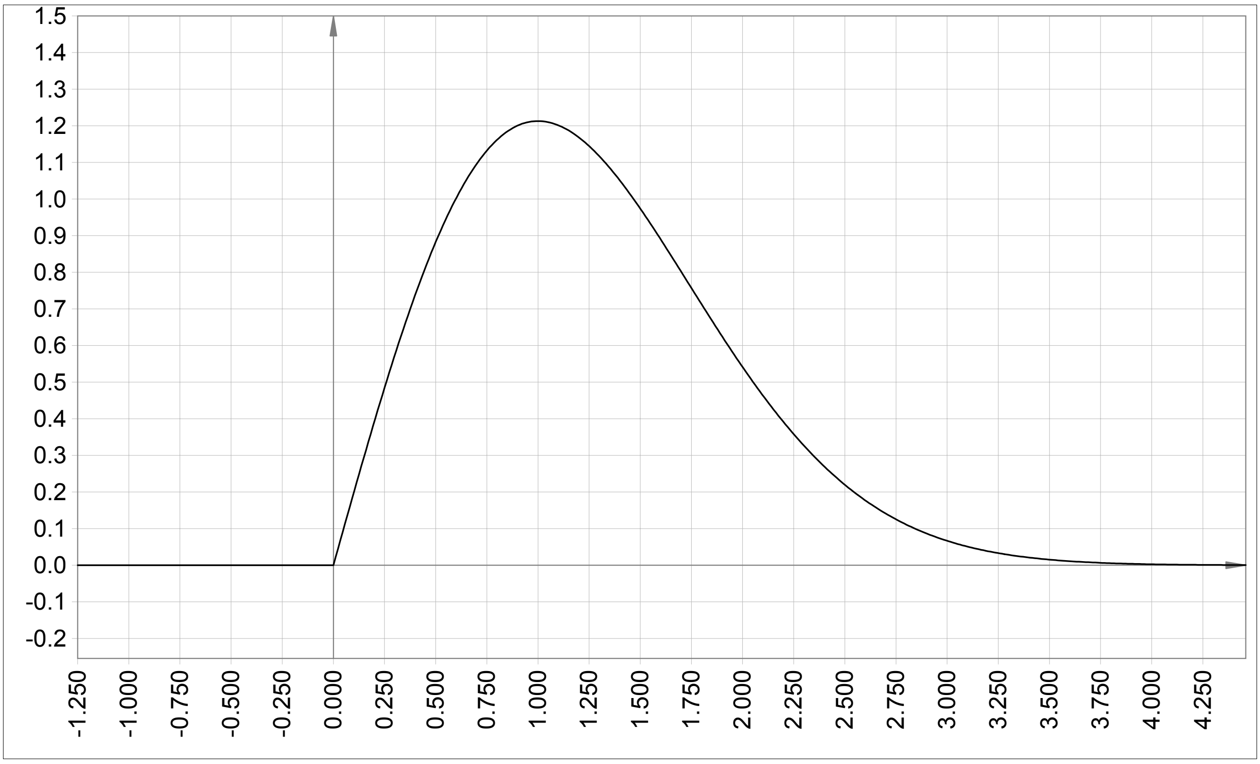
$y' = 2\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}(1 - ax^2)$

$y'' = 2ax\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}(ax^2 - 3)$

$y''' = 2a\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}(6ax^2 - a^2x^4 - 3)$, jeweils mit TI89

a) Aus $y' = 0$ folgt $x_1 = a^{-0.5}$. Da $y''(x_1) < 0$, so $H(a^{-0.5} \mid 2a^{-0.5}\, e^{-0.5})$ Hochpunkt.
Tiefpunkte für alle $x \leq 0$, $y = 0$.
Aus $y'' = 0$ folgt $x_2 = \sqrt{\frac{3}{a}}$. Da $y'''(x_2) \neq 0$, so $W(\sqrt{\frac{3}{a}} \mid 2\sqrt{\frac{3}{a}}\; e^{-1.5})$ Wendepunkt.

b) Skizze für a= 1:



c) $x_1 = a^{-0.5}$ und $y_1 = 2a^{-0.5}\, e^{-0.5}$. Also $y_1 = 2x_1\, e^{-0.5}$.
Die Hochpunkte liegen also auf der Geraden mit Gleichung $y = \frac{2}{\sqrt{e}}x$.

d) Nach TI89 (oder direkt) ist $2\int x\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx = -\frac{2}{a}\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}$

Also ist der Flächeninhalt $F(a) = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b 2x\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx = \frac{2}{a}\lim\limits_{b\to\infty}(-e^{\frac{-ab^2}{2}} + e^0) = \frac{2}{a}$.

Da nach Voraussetzung $F(a) = a$, so $\frac{2}{a} = a$, also $a = \sqrt{2}$, da $a > 0$.

Lösung Nr 2

a) totale Wahrscheinlichkeit

P(einwandfrei) = P(Vertrag) · P(einwandfrei | Vertrag) + P(kein Vertrag) · P(einwandfrei | kein Vertrag)

= $2/3 \cdot 0.82 + 1/3 \cdot 0.70 =$ **0.78**

b) Erwartungswert der Reparaturkosten

E = $0 \cdot 0.70 + 150 \cdot 0.15 + 250 \cdot 0.10 + 600 \cdot 0.05 =$ **77.50 Fr.**

c) Formel von Bayes

$$P(\text{keinVertrag} | \text{Brennerstreikt}) = \frac{P(\text{keinVertrag}) \cdot P(\text{Brennerstreikt} | \text{keinVertrag})}{P(\text{Brennerstreikt})}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 0.30}{1 - 0.78} \approx \mathbf{0.45}$$

d) binomische Verteilung, p = 0.7

$$P = \sum_{k=16}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k} \approx \mathbf{0.2375}$$ (mit TI 89)

e) Nullhypothese: P(einwandfrei) = p = 0.78

Testgrösse X: Anzahl einwandfreier Brenner binomisch verteilt $\rightarrow$ Normalverteilung

$n = 200$, $\mu = np = 156$, $\sigma = (np(1-p))^{0.5} = 5.86$

standardisierte Normalverteilung $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Einseitiger Test mit Verwerfungsbereich V = $\{0, 1, \ldots x_0\}$

Fehler 1. Art $\alpha = 0.05 \rightarrow \Phi(-u_0) = 0.95 \rightarrow u_0 = -1.65$ (aus Tabelle)

$x_0 = \mu + u_0 \sigma = 146.3$

Verwerfungsbereich: **V = {0,1, ... 146}**

Entscheid: **Die Nullhypothese wird beibehalten**

Lösung Nr 3

a) Minimaltransversale mit Fusspunkten $X \in g$ und $Y \in h$

Richtung $\vec{a}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene (h,a): $(1 \cdot 1+2 \cdot 2)\,x + (2 \cdot 2-0 \cdot 1)\,y + (0 \cdot (-2)-1 \cdot 2)\,z = ?$

$5x + 4y - 2z = 5 \cdot 5+4 \cdot 0-2 \cdot 1 = 23$

mit g durchstossen $5(5+4t)+4(8+3t)-2(-1-2t) = 23$

$36\,t = -36 \rightarrow t = -1$

Fusspunkt X (1 / 5 / 1)

Minimaltransversale t: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit h schneiden $\begin{matrix} 1+2t = 5 \\ 5-2t = t' \\ 1+t = 1+2t' \end{matrix} \quad \rightarrow t = 2,\ t' = 1$

Fusspunkt Y (5 / 1 / 3)

Abstand **d (g,h) =** $\overline{XY} = \sqrt{4^2+4^2+2^2}$ **= 6**

b) Die Kugel hat die Strecke XY als Durchmesser

M (3 / 3 / 2), $r_K = 3$

Gleichung $\mathbf{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9}$

c) Der Kreiszylinder hat g als Achse und berührt h in Y, der Radius ist $r_Z = 6$

Alle Punkte P (x / y / z) der Fläche haben von g den Abstand r_Z

G bezeichne den festen Punkt und $\vec{b}$ den Richtungsvektor von g. Dann ist der

Abstand $r_Z = \dfrac{\left|\overrightarrow{GX} \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$

$$6 \cdot \sqrt{29} = \left| \begin{pmatrix} x-5 \\ y-8 \\ z+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \qquad \text{(mit TI 89)}$$

Zylinder $\mathbf{13x^2 + 20y^2 + 25z^2 - 24xy + 12yz + 16zx + 78x - 188y - 126z - 550 = 0}$

d) Der halbe Öffnungswinkel $0 < \varphi < 90°$ wird als Winkel zwischen dem Richtungsvektor $\pm\vec{c}$ von h und dem Vektor von der Kegelspitze $S \in h$ zu einem Punkt $T \in g$ gemessen.

Skalarprodukt $\quad \left|\vec{c}\cdot\overrightarrow{ST}\right| = |\vec{c}|\left|\overrightarrow{ST}\right|\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{\left|0(5+4t-5)+1(8+3t-3)+2(-1-2t-7)\right|}{\sqrt{5}\sqrt{(4t)^2+(3t+5)^2+(2t+8)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{t+11}{\sqrt{5}\sqrt{29t^2+62t+89}}$$

t ist nun so zu bestimmen, dass φ minimal wird

Ableitung $\quad \frac{d}{dt}\cos\varphi = \frac{-36}{\sqrt{5}}\frac{8t+7}{(29t^2+62t+89)^{1.5}}$ (mit TI 89)

Extremstelle $\quad t_{Extr} = \frac{-7}{8}$

halbeÖffnung $\quad \cos\varphi_{Min} = 0.6$

$\varphi_{Min} \approx$ **53.13°**

Lösungsvariante: φ_{Min} ist der Winkel zwischen der Kegelachse h und der Tangentialebene E = (S, g). Sei P(5/8/-1) $\in$ g.

E hat den Normalenvektor $\vec{n}_{hilf} = \vec{v}_g \times \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\-32\\-20\end{pmatrix}$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix}-7\\16\\10\end{pmatrix}$

Damit $\cos\varphi^* = \frac{\begin{pmatrix}-7\\16\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{5}\sqrt{405}} = 0.8$, also $\varphi_{Min} = 90° - \varphi^* \approx$ **53.13°**

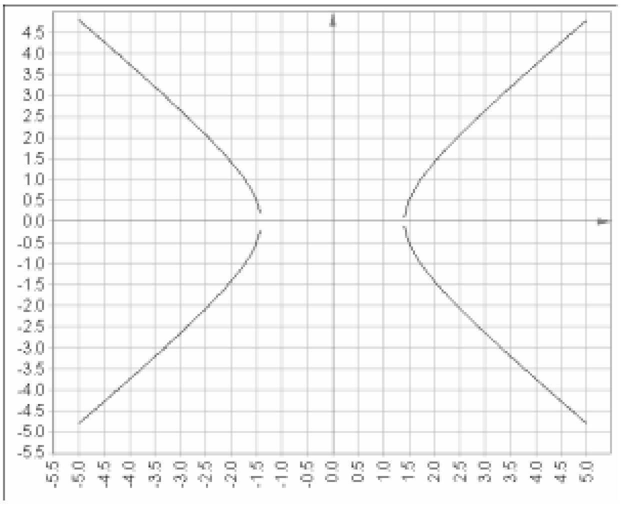
Lösung Nr 4

a) Für Fixpunkt: $z = (1 - i)z - 2i$, also $z = -2$.
f ist Drehstreckung um P(-2) mit Faktor $k = |1 - i| = \sqrt{2}$ und Drehwinkel $\alpha = \arg(1 - i) = -45°$ bzw. 315°.

b) $w = f(z) = g(z)$, also $z^2 - (1 - i)z + 1.5i = 0$. Mit TI 89 folgt $z_1 = 1.5(1 - i)$ und $z_2 = -0.5(1 - i)$.

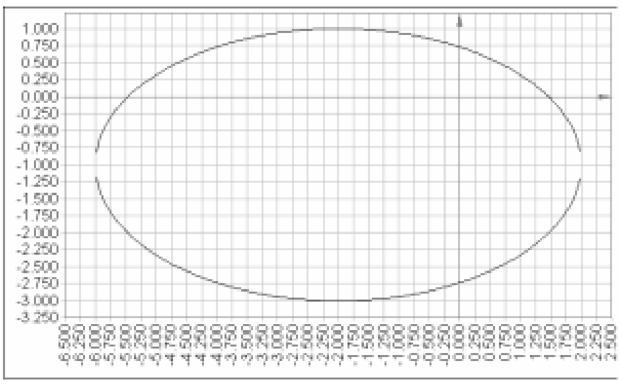
c) $z = x + iy$. Dann gilt für g: $w = u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi - 0.5i$, also $u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy - 0.5$.

Die Parallele zur imaginären Achse durch P(2 + i) hat die Gleichung u = 2. Also gilt für alle gesuchten Punkte Z(z) die Gleichung $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$. Die Punkte liegen daher auf der Hyperbel mit Mittelpunkt (0/0) und Halbachsen a = b = $\sqrt{2}$:



d) Für den Mittelpunkt M(w) der Strecke AB gilt: $w = 0.5((1 - i)z - 2i + 3(1 + i)\bar{z} - 4)$
Mit z = x + iy folgt w = u + iv = 2x + 2y -2 + i (x - y - 1), also
u = 2x + 2y - 2 und v = x - y - 1.
Daraus folgt x = 0.25 (u + 2v + 4) und y = 0.25 (u - 2v)
Mit $|z| = \sqrt{2}$, also $x^2 + y^2 = 2$ folgt $(u + 2)^2 + 4(v + 1)^2 = 16$, d.h.

M bewegt sich auf der Ellipse mit Mittelpunkt (-2 | -1) und Halbachsen a=4 und b=2.



Lösung Nr 5

a) Aus $f = f^{-1}$ folgt $f^2 = I$ (Identität)

f^2: $x'' = a(ax - 3y) - 3(x + (a-4)y) = (a^2 - 3)x + (-6a + 12)y$
$y'' = ax - 3y + (a-4)(x + (a-4)y) = (2a-4)x + (a^2 - 8a + 13)y$

Damit $2a - 4 = 0$, also $a = 2$
Kontrolle: $4 - 3 = 1$, $-12 + 12 = 0$, $4 - 16 + 13 = 1$, also tatsächlich folgt $f^2 = I$ (Identität)

f: $x' = 2x - 3y$
$y' = x - 2y$

Abbildungsdeterminante = -1. Da $\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -2-1 \end{pmatrix}$, so ist f perspektive Affinität mit

Achse s: $x - 3y = 0$ und Affinitätsrichtung $r \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. f ist Affinspiegelung

(Winkel $\alpha = \angle(r,s) = 26.57°$)

b) $y' - xy \cos x = 0$, also $\frac{dy}{dx} = xy \cos x$

$\int \frac{dy}{y} = \int x\cos x \, dx$, also $\ln|y| = \cos x + x\sin x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ (Integration mit TI89)

$|y| = C_2 e^{\cos x + x \sin x}$ mit $C_2 \geq 0$

$y = f(x) = C e^{\cos x + x \sin x}$ mit $C \in \mathbb{R}$

(Die Kontrolle mit TI89 mit deSolve ist möglich!)

c) Beh.: $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{i!} = 1 - \frac{1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (*) (direkt mit TI89)

Beweis:

I Verankerung: (*) gilt für n = 1: $s_1 = \frac{0}{1!} = 0 = 1 - \frac{1}{1!}$

II Ind.vor.: (*) gelte für n = k, d.h. $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{i!} = 1 - \frac{1}{k!}$

Zu zeigen: Dann gilt (*) auch für n = k+1, d.h. $s_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i-1}{i!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

In der Tat: $s_{k+1} = s_k + \frac{k+1-1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{k+1-k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

Aus I und II folgt die Behauptung.