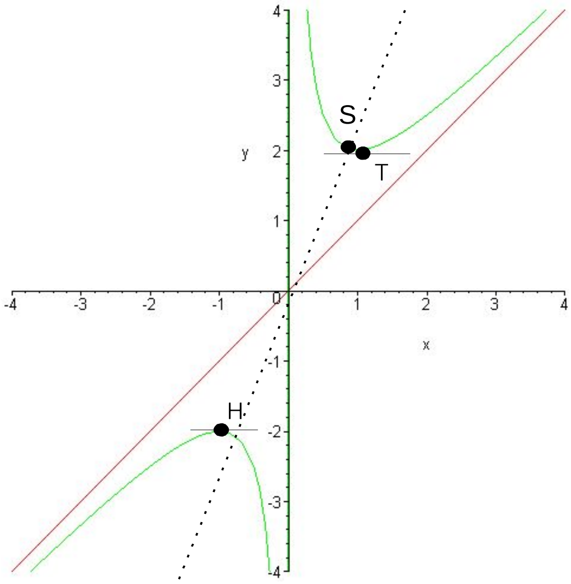
Lösung der Aufgabe 1:

a) $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ Symmetrie bezüglich O(0|0) (Summe ungerader Funktionen)



$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Asymptoten : vertikal $x = 0$

schief $y = x$

Extremalstellen : $x = \pm 1$, $y = \pm 2$

<u>H (-1 | -2), T(1 | 2)</u>

b) $y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2)$

$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}\cdot(x-2)$

$\underline{y = \frac{3}{4}x + 1}$ Tangente

c) Abstand $\overline{OP} = d$

$d^2 = x^2 + \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 = \frac{2x^4+2x^2+1}{x^2}$

$(d^2)' = \frac{(8x^3+4x)\cdot x^2 - (2x^4+2x^2+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^4-2}{x^3}$

Extremalstellen : $4x^4 - 2 = 0$, $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ Scheitel S $x_S = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $y_S = \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

also $\approx$ <u>S(0.84 | 2.63)</u>

d) $y = f(x) = \frac{a^2x^2+1}{x} = a^2x + \frac{1}{x}$ schiefe Asymptote $\underline{y = a^2\cdot x}$

$f'(x) = a^2 - \frac{1}{x^2}$

Tiefpunkt T, wenn $a^2 - \frac{1}{x^2} = 0$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{a}$ $\underline{x_T = \frac{1}{a}\ ;\ y_T = 2a}$

e) Abstand $\overline{OT} = e$

$e^2 = \frac{1}{a^2} + 4a^2$

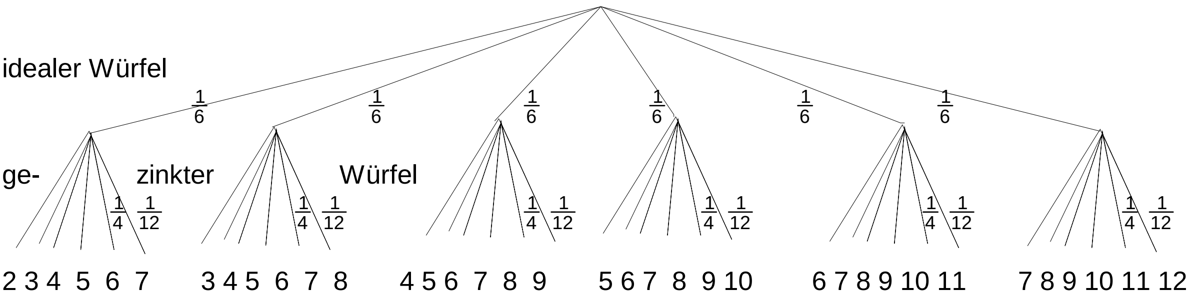
$\frac{d}{da}e^2 = \frac{-2}{a^3} + 8a$

$\frac{d^2}{da^2}e^2 = \frac{6}{a^4} + 8 > 0$

Extremalstelle : $\frac{2}{a^3} = 8a$, also $a^4 = ¼$ Extremaler Tiefpunkt für $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Das <u>Minimum</u> beträgt $e_{Min} = \sqrt{2{,}5}$

Lösung der Aufgabe 2:



$P(6) = 1 - 4\cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12-8-3}{12} = \frac{1}{12}$

a) $P(\sum = 7) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+3+8}{72} = \frac{1}{6}$

b) Anzahl Augensumme 7 ist binomial verteilt

$n = 20,\ p = \frac{1}{6}$ $\qquad P_{20}(2) = \binom{20}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{18} = 0.198$

c) Gegenereignis : in n Würfen nie Summe 7 werfen

$P_n(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.01$

$n\cdot \lg\frac{5}{6} < \lg 0.01 = -2$

$n > \frac{-2}{\lg\frac{5}{6}} \approx 25.3$ $\qquad$ es sind mindestens 26 Würfe nötig

d) P(I zeigt 4, II zeigt 4) = P(I zeigt 4) + P(II zeigt 4) - P(I zeigt 4 $\cap$ II zeigt 4) =

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \approx 0.3055$

e) Bedingte Wahrscheinlichkeit $\qquad P(\text{gezinkt} \mid 5) = \frac{P(5\cap \text{gezinkt})}{P(5)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{3}{5}$

f)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{72}+\frac{1}{24}+\frac{3}{36}$	$\frac{1}{72}+\frac{1}{24}+\frac{2}{36}$	$\frac{1}{72}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}$	$\frac{1}{72}+\frac{1}{24}$	$\frac{1}{72}$
p_i	$\frac{2}{72}$	$\frac{4}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{8}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{12}{72}$	$\frac{10}{72}$	$\frac{8}{72}$	$\frac{6}{72}$	$\frac{4}{72}$	$\frac{1}{72}$

g) $E(X) = \sum x_i\, p_i = \frac{1}{72}\cdot(2\cdot4 + 3\cdot4 + 4\cdot6 + 5\cdot8 + 6\cdot11 + 7\cdot12 + 8\cdot10 + 9\cdot8 + 10\cdot6 + 11\cdot4 + 12\cdot1) =$

$= \frac{1}{72}\cdot(4 + 12 + 24 + 40 + 66 + 84 + 80 + 72 + 60 + 44 + 12) = \frac{83}{12} \approx 6.92$

Lösung der Aufgabe 3 :

a) Gleichsetzen der Ortsvektoren für den Schnittpunkt S :

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix} + t'\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \left|\begin{matrix}1 & + & 2t & = & 5 & + & 2t'\\ -3 & + & 2t & = & -5 & & \\ -3 & - & t & = & 1 & + & t'\end{matrix}\right|$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man t' = -3, was mit der Gleichung von h sofort den Schnittpunkt ergibt :

$$\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}$$, also <u>S(-1|-5|-2)</u>.

[für den Parameter t erhält man durch Einsetzen in der der 1. oder 3.Gleichung : t = -1]

b) Winkel α zwischen den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ der beiden Geraden :

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+0+1^2}} = \frac{4-1}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$, also ist <u>α = 63,°4349...</u>

c) Anfangspunkt (Aufpunkt) von g als Anfangspunkt der Ebene E wählen :

$$E: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \left|\begin{matrix}x & = & 1 & + & 2u & + & 2v\\ y & = & -3 & + & 2u & & \\ z & = & -3 & - & u & + & v\end{matrix}\right|$$

Kombination der 1. und 3.Gleichung liefert x - 2y = 7 + 4u
2.Gleichung z = -3 + 2u

Die Elimination von u ergibt x - 2y - 2z = 13 oder <u>x - 2y - 2z - 13 = 0</u>

d) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ steht senkrecht zur Ebene mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

Es ist n : $\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Da g in der Ebene E liegt, ist der Schnittpunkt mit g auch Durchstosspunkt D von n mit der Ebene E : (2 + t) - 2·(1 - 2t) -2·(-2-2t) - 13 = 0 für den Wert t = 1, also ist der Durchstosspunkt <u>D(3|-1|-4) = Q</u>

und <u>Q ∈ g</u>, für t = 1 : $\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung der Aufgabe 4 :

a) $F'(x) = \left(-\frac{1}{3}(a-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(a-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = x\sqrt{a-x^2}$

b) Inhalt A_1 des Flächenstückes zwischen Kurve und x-Achse im 1. Quadranten:

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{a}} x\sqrt{a-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3}(a-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{a}} = -\frac{1}{3}\left[(a-a)^{\frac{3}{2}} - (a-0)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

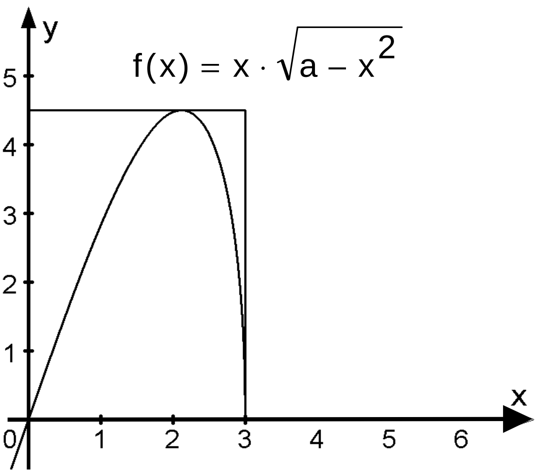
c) Nullstellen von f(x): $f(x) = x\cdot\sqrt{a-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}$

Volumen des Rotationskörpers:

$$V_{Rot} = \pi\int_0^{\sqrt{a}} (x\sqrt{a-x^2})^2\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{a}} x^2(a-x^2)\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{a}} (ax^2-x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{a}} = \pi\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{a^{\frac{1}{2}}} = \pi\left[\frac{a^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{a^{\frac{5}{2}}}{5} - 0\right] = \frac{2}{15}\pi a^{\frac{5}{2}}$$

d) Skizze für a = 9 :



Maximum von f(x) im 1. Quadranten:

$$f'(x) = \sqrt{a-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}} = \sqrt{a-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a-x^2}}$$

$$= \frac{a-x^2-x^2}{\sqrt{a-x^2}} = \frac{a-2x^2}{\sqrt{a-x^2}}$$

Nullstellen von f'(x): $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a}$

Die positive Lösung ist die Maximalstelle von f(x) im 1. Quadranten.

Der Zylinder hat das Volumen $V_{Zyl} = \pi r^2 h$ mit $r = f(\sqrt{\frac{a}{2}})$ und $h = \sqrt{a}$.

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\sqrt{a-\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\sqrt{a-\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2} \qquad \Rightarrow \qquad V_{Zyl} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{a} = \frac{\pi}{4}a^{\frac{5}{2}}$$

Volumen des Rotationskörpers von Aufg. c): $V_{Rot} = \frac{2}{15}\pi a^{\frac{5}{2}}$

Verhältnis von V_{Zyl} zu V_{Rot} : $\frac{V_{Zyl}}{V_{Rot}} = \frac{\frac{\pi}{4}a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{15}\pi a^{\frac{5}{2}}} = \frac{15}{8}$

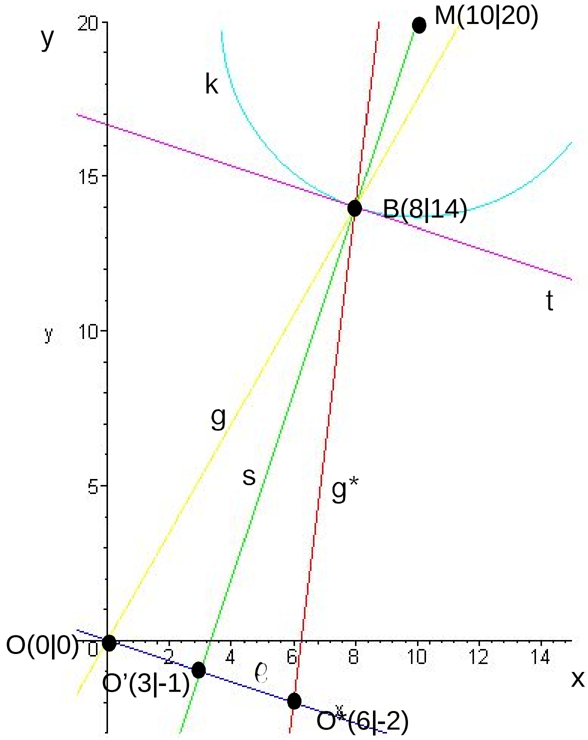
Das Verhältnis ist tatsächlich nicht von a abhängig.

Lösung der Aufgabe 5:

a) k : $x^2 - 20x + y^2 - 40y + 460 = 0$

$(x-10)^2 + (y-20)^2 = 40$

$M(10|20)$, $R = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



b) $g \cap k = \{ B, C \}$

$(x-10)^2 + (\frac{7}{4}x-20)^2 = 40$

$x^2 - 20x + 100 + \frac{49}{16}x^2 - 70x + 400 = 40$

$13x^2 - 288x + 1472 = 0$

$x_1 = 8$, $x_2 = \frac{184}{13} > 8$

Da g durch (0|0) führt, ist B(8|14) näher beim Ursprung O(0|0).

c) Steigung $m_{(MB)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{2} = 3$; die Steigung der Tangente ist also $\underline{m_t = -\frac{1}{3}}$

$t: y = -\frac{1}{3}x + q$ $\qquad B(8|14) \in t: 14 = -\frac{1}{3} \cdot 8 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{50}{3}$

also t : $\underline{y = -\frac{1}{3}x + \frac{50}{3}}$ bzw. $\underline{x + 3y - 50 = 0}$

d) $\varphi = \angle(g,t)$, $\varphi < 90^\circ$

$$\tan\varphi = \left| \frac{-\frac{1}{3} - \frac{7}{4}}{1 - \frac{7}{12}} \right| = 5 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi \approx 78.69^\circ$$

e) m sei die Steigung der gespiegelten Geraden g*

$\varphi = \angle(g,t) = \angle(g^*, t)$: $\quad 5 = \left| \frac{-\frac{1}{3} - m}{1 - \frac{1}{3}m} \right|$

I $\quad 5 - \frac{5m}{3} = -\frac{1}{3} - m \quad \Rightarrow \quad m = 8$

II $\quad -5 + \frac{5m}{3} = -\frac{1}{3} - m \quad \Rightarrow \quad m = m_g = \frac{7}{4}$

Also ist $\quad g^*: y = 8x + q \qquad B(8|14) \in g^* \quad \Rightarrow q = -50$

$g^*: \underline{y = 8x - 50}$

Lösungsvariante : Über {O'} = $s \cap \ell$ (siehe Figur), O'(3 | -1) $\Rightarrow$ O*(6 | -2)