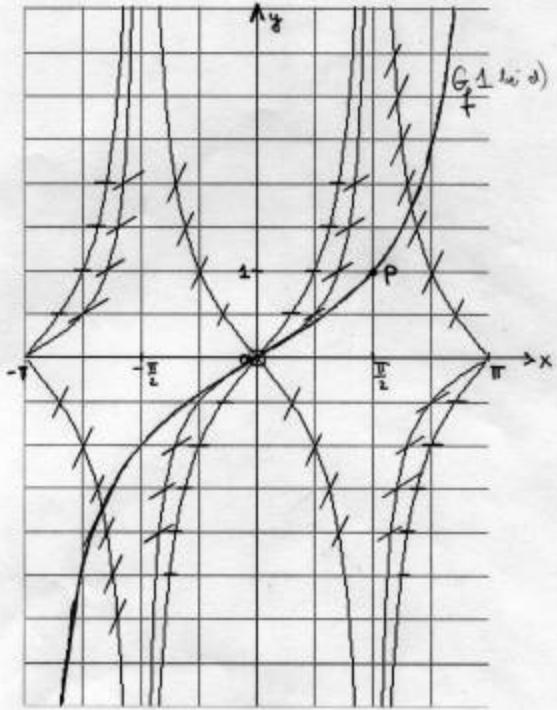
① DGL: $y' \sin x + y \cos x = \sin x \quad (*)$

a) Isoklinenschar: $y' = k$ $\qquad y \cos x = \sin x\,(1-k)$

$\cos x \neq 0$: $\qquad y = (1-k)\tan x$ 1

$k=0$: $y = \tan x$
$k=0.5$: $y = \frac{1}{2}\tan x$ } 1 graphe 1
$k=2$: $y = -\tan x$



d) $y = f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\qquad \left(P\left(\frac{\pi}{2}\,|\,1\right) \rightarrow C = 1\right)$

① $y' \sin x + y \cos x = \sin x \qquad (*)$

3 a) s. separates Blatt

b) Homogene DGL: $y' \sin x = -y \cos x$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad 1$$

2 $$\ln|y| = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$y = \frac{C}{\sin x} \qquad 1$$

c) $y' \sin x = -y \cos x + \sin x \qquad (*)$

Variation der Konstanten: $y_0 = \frac{C(x)}{\sin x}$

$$\rightarrow \frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x} \cdot \sin x = -\frac{C(x)\cdot\cos x}{\sin x} + \sin x$$

$$C'(x) = \sin x$$

$$C(x) = -\cos x$$

$$y_0 = -\frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1$$

2 Lösungsgesamtheit:

$$y = \frac{C}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{C - \cos x}{\sin x} \qquad 1$$

d) $P\left(\frac{\pi}{2} \mid 1\right) \in G_f$:

$$1 = \frac{C - 0}{1} \rightarrow C = 1$$

$$y = f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \qquad 1$$

$= \tan\frac{x}{2}$ 1 Graph G_f: s. separates Blatt

Stetige Fortsetzung bei $x = 0$?

3 De l'Hospital: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ 1

Es ex. also die stetige Fortsetzung g von f bei 0, nämlich

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(2) Komplexe Funktion $w = f(z) = \frac{2z-i}{z} = 2 - \frac{i}{z}$

a) Definitionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ½

f^{-1}: $zw = 2z - i$

$i = z(2-w)$

$w \neq 2$: $z = \frac{i}{2-w}$ 1

Wertebereich $W = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ ½

2

b) $k: |z| = 1$, $k' = f(k)$?

$\left| \frac{i}{2-w} \right| = \frac{1}{|2-w|} = 1$ 1

$\rightarrow k': |w-2| = 1$ 1 k' ist Kreis um Mittelpunkt $M(2)$ und Radius 1

2

c) imag. Achse h': $-w = \overline{w}$, $h = f^{-1}(h')$?

$-2 + \frac{i}{\overline{z}} = 2 + \frac{i}{z}$ 1

$i\overline{z} = 4z\overline{z} + iz$

$z\overline{z} + \frac{1}{4}iz - \frac{1}{4}i\overline{z} = 0$

$\left(z - \frac{1}{4}i\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{1}{16}$

$h: \left| z - \frac{1}{4}i \right| = \frac{1}{4}$ 1 Kreis mit Mittelpunkt $z\left(\frac{1}{4}i\right)$ und Radius $\frac{1}{4}$

2

d) $g: (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 0$, d.h. $g: y = x$, $g' = f(g)$?

$(1+i)\frac{i}{2-w} + (1-i)\frac{-i}{2-\overline{w}} = 0$ 1

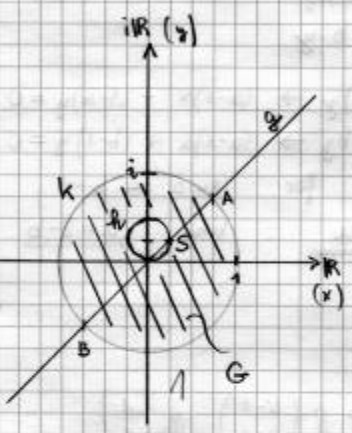
$(i-1)(2-\overline{w}) + (-i-1)(2-w) = 0$

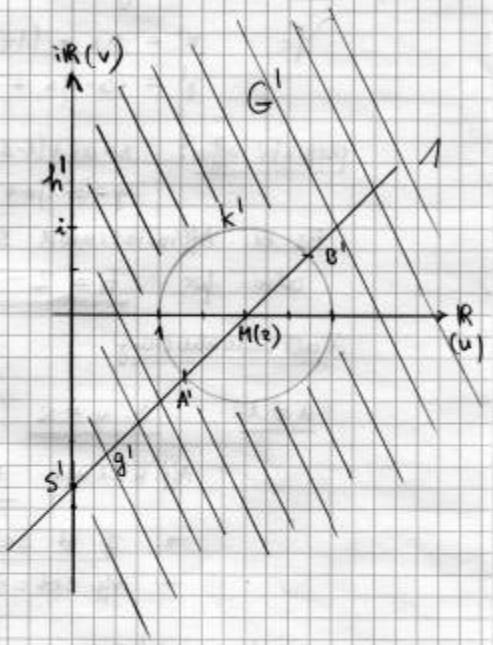
$g': (1+i)w + (1-i)\overline{w} - 4 = 0$ 1

bzw. $u - v + u - v - 4 = 0$

$g': v = u - 2$

Formulierung (2) d)





(3) a) Gleichung der Kurven, die jede Kurve mit Gl. $x^2 + 4y^2 = a^2$ $(a \in \mathbb{R})$ rechtwinklig schneiden.

Gegebene Kurven sind Ellipsen mit Halbachse a und $\frac{a}{2}$.

In jedem Schnittpunkt $P(x|y)$ der Ellipse und der gesuchten Kurve mit Gl. $y = f(x)$ gilt

$$y' \cdot y'_{Ell} = -1 \quad (*)$$

für y'_{Ell}:

$$2x + 4 \cdot 2y \cdot y'_{Ell} = 0$$

$$\rightarrow (y \neq 0) \quad y'_{Ell} = -\frac{x}{4y}$$

$$\overset{(*)}{\rightarrow} (x \neq 0) \quad y' = \frac{4y}{x}$$

DGl für gesuchte Funktion

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|y| = 4 \ln|x| + \ln|C|$$

$$y = Cx^4$$

Lösung:

I $x = 0$ y-Achse schneidet alle Ellipsen rechtwinklig

II $y = 0$ $(C = 0)$ x-Achse " " " "

III $y = Cx^4$ $(C \neq 0)$

③ b) Affine Abbildung: (also $\Delta \neq 0$)

$$f: \quad x' = ax + (1-a)y$$
$$y' = (a-1)x + by$$

perspektiv affin? $x = ax + (1-a)y \rightarrow (a-1)x + (1-a)y = 0$

$y = (a-1)x + by \rightarrow (a-1)x + (b-1)y = 0$

Es ex. Affinitätsachse s für $1-a = b-1$,

also für $\underline{b = 2-a}$ bzw. $\underline{a = 2-b}$

Fallunterscheidung

$\underline{a \neq 1}$: $\underline{s: y = x}$

Affinität $\underline{r \parallel \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

→ f ist Scherung

→ Affin. Volumenverhältnis $\underline{k = \Delta = 1}$

$\underline{a = 1}$: $x' = x$

$y' = by$ $\quad \Delta = b \neq 0$ (da affine Abb.)

$\underline{b = 1}$: $f = \mathrm{I}$ (identität)

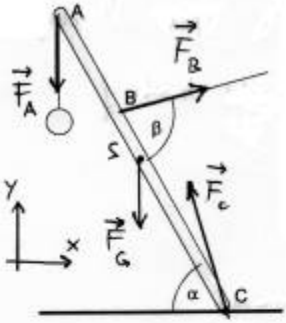
$\underline{b \neq 1}$: $s: y = 0$ (x-Achse)

$r \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ b-1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f ist normale Affinität

Aufg. 4

a)



$\alpha = 62°$
$\beta = 76°$

2

b) $F_A = 196\,N$, $F_G = 491\,N$, $\ell_A = 3\,m$, $\ell_B = 2\,m$

Drehmomente bezüglich C:

$F_A \cdot \ell_A \cdot \sin(90°-\alpha) + F_G \cdot \frac{\ell_A}{2} \cdot \sin(90°-\alpha) = F_B \cdot \ell_B \cdot \sin\beta$

$\left(F_A + \frac{F_G}{2}\right) \cdot \ell_A \cdot \cos\alpha = F_B \ell_B \sin\beta$

$\Rightarrow F_B = \frac{\left(F_A + \frac{F_G}{2}\right) \ell_A \cos\alpha}{\ell_B \sin\beta} = \underline{320\,N}$

2

c) $F_{Bx} = F_B \cdot \cos(\beta-\alpha) = 311\,N$

$\rightarrow |F_{cx}| = |F_{Bx}| = 311\,N$ /

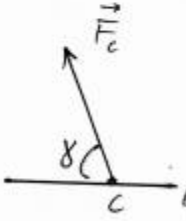
$F_{By} = F_B \cdot \sin(\beta-\alpha) = 77{,}5\,N$

$F_{cy} + F_{By} = F_A + F_G$

$\rightarrow F_{cy} = F_A + F_G - F_{By} = 610\,N$ /

$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = \underline{684\,N}$ /

$\tan\gamma = \frac{F_{cy}}{|F_{cx}|} = 1{,}96 \Rightarrow \underline{\gamma = 63{,}0°}$ /



4

8P

Aufg. 5

$m = 0{,}5\ kg$

Differentialgleichung: $m\ddot{s} = -k\dot{s} - mg$

mit $v = \dot{s}$: $m\dot{v} = -kv - mg$

Anfangsbedingungen: $s(0) = 0\,m$, $\dot{s}(0) = v(0) = v_0 = 7{,}5\ \frac{m}{s}$

$\dot{v} = -\frac{k}{m}v - g$ mit $\frac{k}{m} = 0{,}8\ s^{-1}$ 1

$\rightarrow$ $\dot{v} = -0{,}8v - 10$ (I) inhomogene DGL.

$\dot{v} = -0{,}8v$ (H) zugehörige homogene DGL

allg. Lsg. von (H): $v = v^* \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$ (v^*: Integrationskonst.)

Ansatz part. Lsg. von (I): $v = konst.$, $\dot{v} = 0$

$\rightarrow$ $0 = -0{,}8v - 10 \Rightarrow v = -12{,}5$

allg. Lsg. von (I): $\underline{v = v^* \cdot e^{-0{,}8t} - 12{,}5}$ 3

Anfangsbedingung: $v(0) = 7{,}5 = v^* - 12{,}5$

$\Rightarrow$ $v^* = 20$

$\rightarrow$ Lösung: $\underline{v = 20 \cdot e^{-0{,}8t} - 12{,}5}$ 1

$s(t) = \int v\,dt = -25 \cdot e^{-0{,}8t} - 12{,}5 \cdot t + s^*$ 1

$s(0) = 0$: $0 = -25 + s^* \Rightarrow s^* = 25$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{s(t) = -25 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} - 12{,}5 \cdot t + 25}}$ 1

$s(1{,}5\ s) = \underline{\underline{-1{,}28\ m}}$ 1

8 P

Aufg. 6

$v = 0{,}7c \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}7^2}} = 1{,}40$ 1

a) x in Lichtsekunden (Ls) $\rightarrow c = 1\,\frac{Ls}{s}$, $v = 0{,}7\,\frac{Ls}{s}$

S: $x_B = \underline{50\,Ls}$ (0.5), $t_B = \frac{x_B}{v} = \underline{71{,}4\,s}$ (1)

S': $x_B' = \underline{0\,Ls}$ (0.5) $t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{v x_B}{c^2}\right) = \underline{51{,}0\,s}$ (1)

$\left(= \frac{t_B}{\gamma}\right)$ 3

b) In S: Lichtblitz wurde 50 s vor Ereignis B ausgelöst, also:

S: $x_C = \underline{0\,Ls}$, $t_C = \underline{21{,}4\,s}$

S': $x_C' = \gamma(x_C - v t_C) = \underline{-21{,}0\,Ls}$

$t_C' = \gamma\left(t_C - \frac{v x_C}{c^2}\right) = \underline{30{,}0\,s}$ 4

8P

Aufg. 7

$f = 600\,\text{Hz} \longrightarrow \omega = 2\pi f = 3770\,s^{-1}$

$Z_L = i\omega L = i \cdot 37{,}7\,\Omega$ 1

$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -i \cdot 132{,}6\,\Omega$ 1

$Z_{R_2L} = R_2 + Z_L = 20\,\Omega + i \cdot 37{,}7\,\Omega$ 1

$Z_{CR_2L} = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{R_2L}}} = 37{,}4\,\Omega + i \cdot 44{,}8\,\Omega$ (TI-85) 1

$Z = Z_{R_1CR_2L} = R_1 + Z_{CR_2L} = 67{,}4\,\Omega + i \cdot 44{,}8\,\Omega$ 1

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{|Z| = 80{,}9\,\Omega}}$, $\underline{\underline{\varphi = 33{,}6°}}$ 1

6 P

formal: $Z = R_1 + \frac{i\omega L + R_2}{1 + i\omega C(i\omega L + R_2)}$