KANTONSSCHULE REUSSBÜHL MATURITÄTSPRÜFUNG 2005

(Bd, Gä)

Schwerpunktfach
Physik und Anwendungen der Mathematik

Bemerkungen:

Zeit: 3 Stunden

Punktzahl: Maximum = 60 Punkte, 48 Punkte = Note 6.

Erlaubte Hilfsmittel: DMK/DPK Formelsammlung, Taschenrechner TI-89.

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Formeln, die nicht der Formelsammlung entnommen werden, sind zu beweisen oder zu begründen. Die Lösungswege müssen klar dokumentiert werden.

Wenn Sie für eine Teilaufgabe ein Resultat einer vorhergehenden Teilaufgabe verwenden müssen, die Sie nicht gelöst haben, können Sie, falls kein Ersatzwert angegeben ist, mit einem selbstgewählten Wert weiter rechnen. Dieser ist dann aber deutlich zu kennzeichnen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Gegeben sind die beiden komplexen Funktionen $f : C \setminus \{0\} \to C : z \mapsto \frac{-5+10\iota}{z} + 2$ und

$h : C \to C : z \mapsto (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\iota)z + 1 + 2\iota$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Fixpunkte der beiden Funktionen.
b) Berechnen Sie die 2 Stellen z_1 und z_2, bei denen die beiden Funktionen je den gleichen Wert ergeben („Schnittstellen").
c) Berechnen Sie das Bild der Gerade g durch die 2 Stellen z_1 und z_2 von Teil b) unter der Abbildung f.
(Falls Sie Teil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie bei Teilaufgabe c) die 2 Stellen $z_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\iota$ und $z_2 = 2(1-3.5\iota)$.)

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Ein Lichtstrahl geht durch den Punkt L(40|60|26) einer Lampe und trifft im Punkt A(40|15|11) auf die Kugel k. Ein Teil des Lichtstrahles geht durch die Kugel hindurch, ein Teil wird reflektiert. Der Abstand des Mittelpunktes M von k zur xy-Ebene beträgt 15. Die Normalprojektion N des Punktes M auf die xy-Ebene hat die Koordinaten N(40|12|0).
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel k.
b) Berechnen Sie Koordinaten des Punktes B, in dem der durch k hindurchgehende Teilstrahl aus der Kugel austritt.
c) Bestimmen Sie die Gleichung des reflektierten Teilstrahles.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem der reflektierte Teilstrahl die xy-Ebene trifft, und den Abstand dieses Punktes S von der Tangentialebene τ der Kugel k im Punkt A.
(Falls Sie Teilaufgabe c) nicht gelöst haben, verwenden Sie bei Teilaufgabe d) statt des reflektierten Strahles den Strahl mit der Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -15 \end{pmatrix}$.)

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Unabhängige Kurzaufgaben:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''+4y'=3e^{-3x}-8y$.

b) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral: $\int_1^4 \frac{\cos(\sqrt{x^3}+\pi)\cdot x}{\sqrt{x}}\,dx$

c) Berechnen Sie den maximalen Konvergenzbereich ID der Potenzreihe $h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(1-x)^i$ und weisen Sie durch eine Taylor-Entwicklung mit Entwicklungsstelle $x_0=1$ nach, dass $\frac{1}{x}=h(x)\ \forall x\in \mathrm{ID}$ gilt (unter der Annahme, dass das Restglied $R_{n+1}(x)$ für alle $x\in \mathrm{ID}$ gegen 0 konvergiert).

Aufgabe 4 (10 Punkte):
Der „kleine Prinz“: Gravitation, Rotation

Der „kleine Prinz“ von Antoine de Saint-Exupéry lebt auf einem winzigen Planeten (Radius 5.5 m, Masse $5.7\cdot10^5$ kg). Er wiegt 30 kg und sein Schwerpunkt liegt 0.50 m über dem Boden.

a) Berechnen Sie die Kraft, mit der der Planet den kleinen Prinzen anzieht.

b) Der kleine Prinz springt auf seinem Planeten 0,50 m hoch. Mit welcher Geschwindigkeit muss er dafür abspringen? Hinweis: Die Fallbeschleunigung kann hier nicht als konstant angenommen werden.

c) Wie gross ist im Vergleich dazu die Fluchtgeschwindigkeit auf der Oberfläche des Planeten? Leiten Sie dazu eine Formel zur Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit her.

d) Nehmen Sie nun an, der Planet drehe sich in 30 Tagen um seine eigene Achse. Berechnen Sie den Drehimpuls und die Rotationsenergie des Planeten (ohne Prinz).

e) Der kleine Prinz liegt nun auf dem Äquator seines rotierenden Planeten am Boden. Anschliessend steht er auf. Wie wirkt sich dies auf die Drehfrequenz des Planeten aus (qualitative Antwort ohne Rechnung)?

Aufgabe 5 (10 Punkte):
Reale Spule: Wechselstrom, Differentialgleichungen

a) Für eine reale Spule mit dem Ohmschen Widerstand $R = 40.0\,\Omega$ soll die Induktivität bestimmt werden. Dazu legt man eine Wechselspannung von 10.0 V (Effektivwert) und 50.0 Hz an. Man misst eine Effektivstromstärke von 20.0 mA. Berechnen Sie den induktiven Widerstand X_L und die Induktivität L der Spule.

b) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom und Gesamtspannung und zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für diese Spule.

c) Im folgenden soll nun der Einschaltvorgang für diese Spule betrachtet werden. Dabei wird eine Gleichspannungsquelle (U_Q) an die Spule angeschlossen und eingeschaltet. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Stromstärke auf und bestimmen Sie ihre Lösung. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke auch graphisch dar. Das Einsetzen von Zahlenwerten ist nicht erforderlich.

Aufgabe 6 (10 Punkte):
Wellen- und Teilchenaspekt von Licht und Materie

a) Bei einem Experiment zum Fotoeffekt wird eine Fotokathode mit Licht von drei ausgewählten Wellenlängen bestrahlt. Gemessen wird die Spannung, die die schnellsten der ausgelösten Fotoelektronen gerade nicht mehr durchlaufen können. Dabei ergeben sich folgende Messwerte:

λ in nm	667.8	492.2	402.6
U in V	0.810	1.48	2.03

Stellen Sie die maximale kinetische Energie (in J) der Fotoelektronen als Funktion der Frequenz graphisch dar. Bestimmen Sie die Steigung und beide Achsenabschnitte der Geraden und interpretieren Sie diese physikalisch anhand der Einstein-Gleichung.

b) Während der Fotoeffekt den Teilchencharakter von Licht zeigt, kann man den Wellencharakter von Elektronen durch ein Interferenzexperiment (nach Jönsson) zeigen. Dazu werden Elektronen mit einer Spannung von 50 kV beschleunigt und treffen dann auf einen Doppelspalt mit einem Spaltabstand von $2.0 \cdot 10^{-6}$ m. Bestimmen Sie **relativistisch** die de-Broglie-Wellenlänge für diese Elektronen und berechnen Sie den Abstand benachbarter Interferenzstreifen am Schirm, der vom Doppelspalt 35 cm entfernt ist.

c) Um den Elektronenstrahl zu erzeugen, lässt man die Elektronen nach dem Beschleunigen aus einer Öffnung mit 0.10 mm Durchmesser austreten. Welche Impulsunschärfe ergibt sich für die Elektronen hinter der Öffnung?