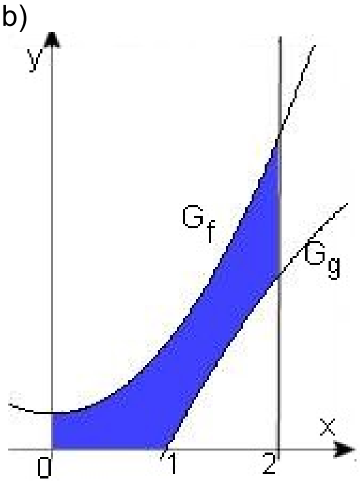
Lösung Aufgabe 1, KSR GF07

a) Zielfunktion $d(x) = 2x^2 + 1 - (-x^2 + 8x - 7)$ soll minimal werden.

$d'(x) = 6x - 8 := 0$, also $x_1 = \frac{4}{3}$ und somit $\mathbf{P(\frac{4}{3} | \frac{41}{9})} \in G_f$

Da $d''(x) = 6 > 0$ für alle x, so ist $d(x_1)$ minimal.

b)



Berechnung Nullstelle x_0 der Funktion g:
$x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7) = 0$, also $x_0 = 1$.
(Die zweite Nullstelle 7 kommt nicht mehr in Frage)

Ansatz:

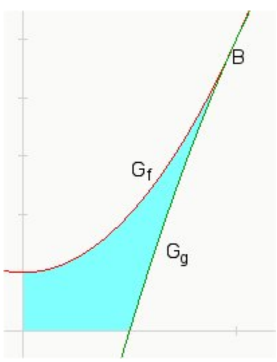
Volumen $V = \pi \left(\int_0^2 (2x^2 + 1)^2 \, dx - \int_1^2 (-x^2 + 8x - 7)^2 \, dx \right)$ $V = \pi \left(\int_0^2 (4x^4 + 4x^2 + 1) \, dx - \int_1^2 (x^4 + 64x^2 + 49 - 16x^3 + 14x^2 - 112x) \, dx \right)$

$$V = \pi \left(\left[\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x \right]_0^2 - \left[\frac{1}{5}x^5 - 4x^4 + \frac{78}{3}x^3 - 56x^2 + 49x \right]_1^2 \right)$$

$$\mathbf{V} = \pi \left(\frac{574}{15} - \frac{138}{15} \right) = \mathbf{\frac{436}{15}}\pi$$

c) Für den Berührpunkt B(u/v) gilt: $a u^2 + 1 = -u^2 + 8u - 7$ (1) und $2 a u = -2u + 8$ (2)
Aus (2) folgt $a u = -u + 4$, eingesetzt in (1) ergibt $(-u + 4)u + 1 = -u^2 + 8u - 7$, also
$4u + 1 = 8u - 7$. Damit ist $u = 2$ und $\mathbf{a = 1}$

d) $y = f_1(x) = x^2 + 1$, Berührpunkt B(2/..) gemäss c),
Berechnung Nullstelle x_0 von G_g siehe bei b)



Ansatz: Inhalt $A = \int_0^2 (x^2 + 1) \, dx - \int_1^2 (-x^2 + 8x - 7) \, dx = \ldots.$

$$\mathbf{A} = \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} + 16 - 14 - \left(-\frac{1}{3} + 4 - 7 \right) \right)$$
$$= 5 - 3 = \mathbf{2}$$

Lösung Aufgabe 2, KSR GF07

a) P((2,2), (4,1), (4,2), (4,3), (3,4), (2,4), (1,4)) = $\frac{\mathbf{7}\text{ günstige}}{\mathbf{36}\text{ mögliche}} = \mathbf{\frac{7}{36}}$ [oder mit einem Baumdiagramm.]

b) P(2 Punkte) = P((1,1), (1,2), (2,1))
P(3 Punkte) = P((1,2), (1,3), (2,1), (3,1))

P(mind. 4 Punkte) = 1 – P(2 Punkte) – P(3 Punkte) = 1 – $\frac{3}{36} - \frac{4}{36} = \mathbf{\frac{29}{36}}$

c) Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Variable (X = Punktezahl)

Punktezahl x_i	2	3	4	5	6	8	10	12
$P(x_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erwartungswert E(X) = $\frac{2*3+3*4+4*7+5*8+6*11+8*1+10*1+12*1}{36}$ =

$\frac{91}{18} \approx \mathbf{5.06}$

d) P(unterschiedlich | x=6) = $\frac{P(\text{untersch. und } x=6)}{P(x=6)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{11}{36}} = \mathbf{\frac{10}{11}}$

e) Binomialverteilung mit n = 10 und p = $\frac{7}{36}$. X = Anzahl (Punktezahl 4)

P(X=3) = $\binom{10}{3} \left(\frac{7}{36}\right)^3 \left(\frac{29}{36}\right)^7 \approx \mathbf{0.194}$

Lösung Aufgabe 3, KSR GF07

a) <u>Nullstellen:</u> $f_a(x)=0 \Leftrightarrow 4-a\cdot\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=\frac{4}{a} \Leftrightarrow x+1=e^{\frac{4}{a}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=e^{\frac{4}{a}}-1}}$

<u>Asymptoten:</u> $\lim\limits_{x\to -1^+}(4-a\cdot\ln(x+1)=4-a\cdot\lim\limits_{x\to -1^+}(\ln(x+1))=\infty \text{ oder } -\infty$ $\Rightarrow$ Gerade $\underline{\underline{x=-1}}$ ist (einseitige) senkrechte Asymptote für alle Funktionen f_a.

b) $f_a'(x)=-a\frac{1}{x+1}=-\frac{a}{x+1}$ y-Achsenschnittpunkt $\Rightarrow$ $x=0$

$f_a'(0)=-\frac{a}{0+1}=-a\overset{!}{=}-2\Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$

c) $f(x)=4-2\ln(x+1)$ Nullstelle: $x=e^{\frac{4}{2}}-1=e^2-1$

<u>Zielfunktion:</u> $S(x,y)=x+y$ <u>Nebenbedingung:</u> P liegt auf dem Graphen von f, also $y=f(x)=4-2\ln(x+1)$

$\Rightarrow$ $S(x)=x+4-2\ln(x+1)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{D}=[0;e^2-1]$

<u>Lokale Extrema:</u> $S'(x)=1-2\frac{1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}\overset{!}{=}0\Rightarrow \frac{2}{x+1}=1\Rightarrow x+1=2\Rightarrow x=1$

$S''(x)=-2\cdot(-1)\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{D}\Rightarrow x=1$ ist lokale **Minimal**stelle, also muss sich die Maximalstelle am Rand befinden.

<u>Ränder:</u>

$x=0$: $S(0)=0+4-2\ln(0+1)=4-2\cdot 0=4$

$x=e^2-1$: $S(e^2-1)=e^2-1+4-2\ln(e^2-1+1)=e^2-1+0=e^2-1\approx 6.39$

$S(e^2-1)>S(0)$ $\Rightarrow$ Der Punkt $\underline{\underline{P(e^2-1|0)}}$ hat die grösste Koordinatensumme.

d) <u>Tangente t:</u> nach Teilaufgabe a) gilt $m_t=-2 \Rightarrow t: y=-2x+b$

y-Achsenschnittpunkt $S_y(0|4)\Rightarrow 4=b \Rightarrow t: y=-2x+4$

Nullstelle von t: $x_1=2$

<u>Normale n:</u> $m_n=-\frac{1}{m_t}=\frac{1}{2}\Rightarrow n: y=\frac{1}{2}x+4$

Nullstelle von n: $x_2=-8$

Länge der Grundseite des Dreiecks: $g=x_1-x_2=2-(-8)=10$ Höhe: $h=y_{S_y}=4$

Flächeninhalt des Dreiecks: $\underline{\underline{A}}=\frac{1}{2}g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4\,\underline{\underline{=20}}$

Lösungen Aufgabe 3 mit a=3 (Variante):

c) $f(x) = 4 - 3\ln(x+1)$ Nullstelle: $x = e^{\frac{4}{3}} - 1 \approx 2.79$

Zielfunktion: $S(x,y) = x + y$ Nebenbedingung: $y = f(x) = 4 - 3\ln(x+1)$

$\Rightarrow S(x) = x + 4 - 3\ln(x+1)$ mit Definitionsbereich $ID = [0; e^{\frac{4}{3}} - 1]$

Lokale Extrema: $S'(x) = 1 - 3\frac{1}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{3}{x+1} = 1 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$

$S''(x) = -3\cdot(-1)\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \;\; \forall x \in ID \Rightarrow x = 2$ ist lokale **Minimal**stelle, also muss sich die Maximalstelle am Rand befinden.

Ränder:

$x = 0$: $S(0) = 0 + 4 - 3\ln(0+1) = 4 - 3\cdot 0 = 4$

$x = e^{\frac{4}{3}} - 1$: $S(e^{\frac{4}{3}} - 1) = e^{\frac{4}{3}} - 1 + 4 - 3\ln(e^{\frac{4}{3}} - 1 + 1) = e^{\frac{4}{3}} - 1 + 0 = e^{\frac{4}{3}} - 1 \approx 2.79$

$S(0) > S(e^{\frac{4}{3}} - 1) \Rightarrow$ Der Punkt $\underline{\underline{P(0\,|\,4)}}$ hat die grösste Koordinatensumme.

d) $f'(x) = -3\frac{1}{x+1} = -\frac{3}{x+1}$ y-Achsenschnittpunkt $\Rightarrow x = 0$

Tangente t: $m_t = f'(0) = -\frac{3}{0+1} = -3 \Rightarrow t: y = -3x + b$

y-Achsenschnittpunkt $S_y(0|4) \Rightarrow 4 = b \Rightarrow t: y = -3x + 4$

Nullstelle von t: $x_1 = \frac{4}{3}$

Normale n: $m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{3} \Rightarrow n: y = \frac{1}{3}x + 4$

Nullstelle von n: $x_2 = -12$

Länge der Grundseite des Dreiecks: $g = x_1 - x_2 = \frac{4}{3} - (-12) = \frac{40}{3}$ Höhe: $h = y_{S_y} = 4$

Flächeninhalt des Dreiecks: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{40}{3}\cdot 4 = \underline{\underline{\frac{80}{3}}}$

Lösung Aufgabe 4, KSR GF07

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 8-5 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{BS} = \begin{pmatrix} 11-5 \\ 0-8 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 11-1 \\ 0-5 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 40 - 15 \neq 0$, $\vec{AS} \cdot \vec{BS} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -60 + 40 \neq 0$,

$\vec{AB} \cdot \vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = -24 + 24 = 0$ rechter Winkel bei B

$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$, $\overline{AS} = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 0^2} = 5 \cdot \sqrt{5}$, $\overline{BS} = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 0^2} = 10$

Die Katheten **AB** und **BS** haben die Länge **5** bzw. **10**, die Hypotenuse **AS** hat die Länge
$5 \cdot \sqrt{5}$ = 11,18...

b) Kurze Lösung: Die drei Punkte A, B und S haben alle die z-Koordinate -2, also lautet die Gleichung der Ebene **z = −2** bzw. **z + 2 = 0**

Lösung mit Vektorprodukt: $\vec{AB} \times \vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene. Die Gleichung lautet $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$, durch Einsetzen eines Punktes erhält man D = 2

Lösung über die Parameterform mit A als 'Anfangspunkt' und den Richtungsvektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AS}$

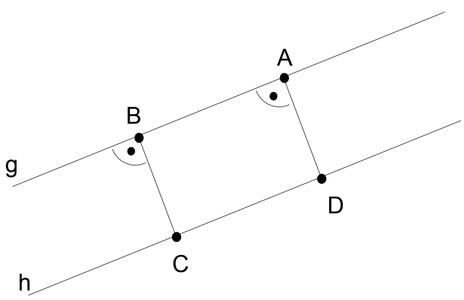
x = 1 + 4u +10v
y = 5 + 3u − 5v
z = -2 + 0u +0v ergibt die Bedingungen **z = -2** und (z.B.) x + 2y = 11 + 10u, d.h. x und y beliebig.

c) g und (AB) haben die gleiche Richtung, gegeben durch den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Punkt A(1|5|-2) liegt nicht auf h: 5 + 4t = 1 für t = -1
8 + 3t = 5 für t = -1
3 + 0t = -2 nie

d)

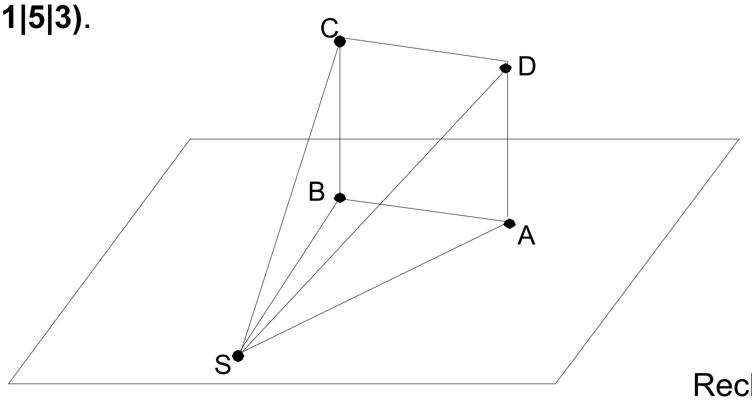
Für den gesuchten Punkt C mit
$\vec{r}_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t_C \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 4t_C \\ 8 + 3t_C \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt die Bedingung



$$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5+4t_C-5\\8+3t_C-8\\3+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4t_C\\3t_C\\5\end{pmatrix} = 25t_C = 0$$

also $t_C = 0$; somit ist **C(5|8|3)** der 'Anfangspunkt' der Geraden h.

Ausserdem ist $\vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{CD} = \vec{r}_C + \vec{BA} = \begin{pmatrix}5\\8\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$. Der vierte Eckpunkt des Rechtecks ist **D(1|5|3)**.

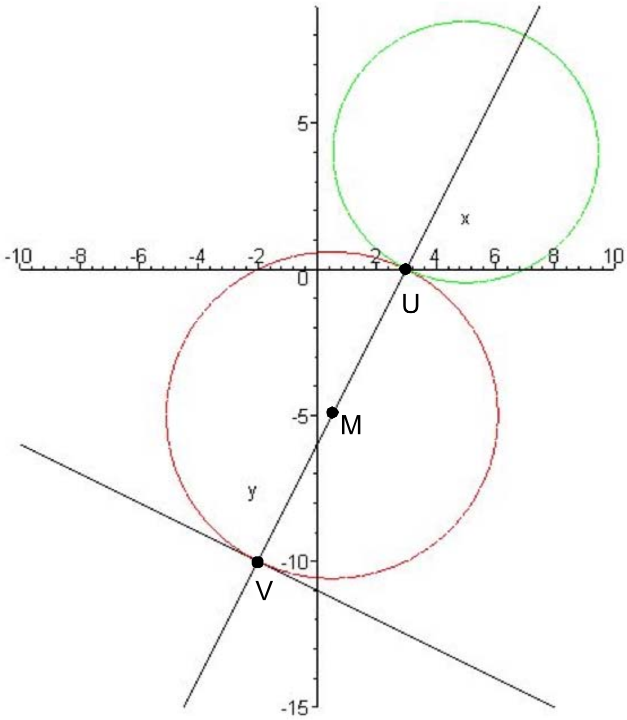


e) Das Rechteck hat die Länge $\overline{AB} = 5$ und die Breite $\overline{BC} = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right| = 5$. Da BS $\perp$ AB steht (siehe Teil a)), aber auch BS $\perp$ BC ist ($\vec{BS}\cdot\vec{BC} = \begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = 0$), ist BS die Höhe der Pyramide.

Also ist **V** = $\frac{G\cdot h}{3} = \frac{25\cdot 10}{3} = \frac{250}{3}$.

Lösung Aufgabe 5a, KSR GF07

k: x^2 -10x + 25 + y^2 -8y + 16 + 21 = 25 + 16 $\Leftrightarrow$ $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$
Kreis mit Mittelpunkt (5|4) und Radius $2\sqrt{5}$.



Gleichung von g : y = - ½ · x − 11

Eine Normale zu g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Die

Gleichung der Normalen durch den Mittelpunkt ist n : $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x = 5 + t\\ y = 4 + 2t\end{matrix}$.

Man erhält die Gleichung von n :
2x - y - 6 = 0 oder y = 2 · x - 6 .

n ∩ g : 2x - 6 = -½ x - 11 $\quad \frac{5}{2}x = -5 \quad \Rightarrow x = -2$, y = - 10 V(-2|-10)

n ∩ k : $(x-5)^2 + ((2x - 6) - 4)^2 = 20 \quad \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 40x + 100 = 0$

$$5x^2 - 50x + 105 = 0$$
$$x-10x + 21 = 0$$
$$(x-3)\cdot(x-7) = 0$$

Man erhält U(3|0) und V(-2|-10) und daraus den Mittelpunkt des gesuchten Kreises: M(½ | -5).

Der Radius des gesuchten Kreises ist

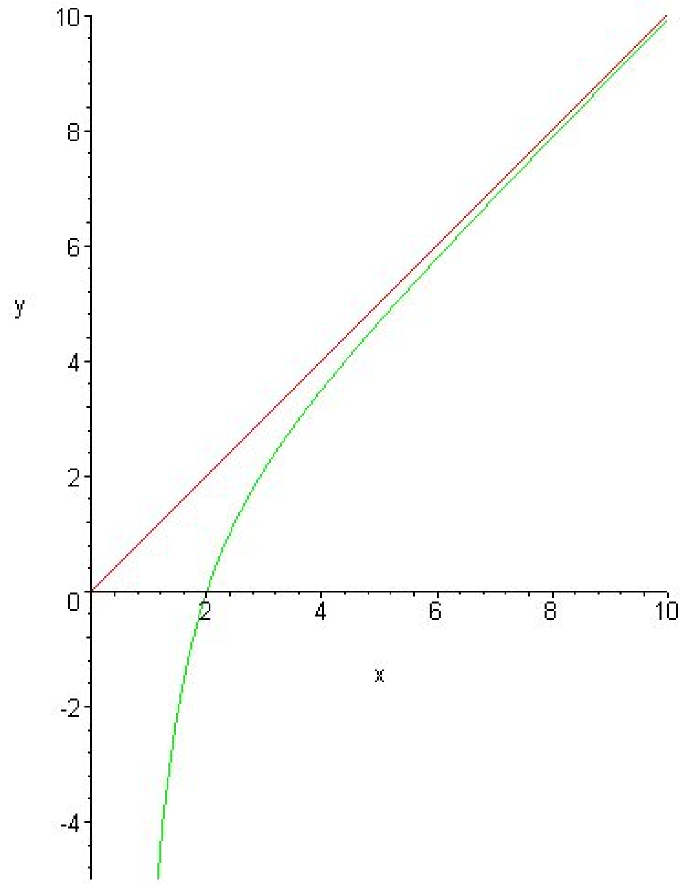
$$\overline{MU} = \left|\overrightarrow{MU}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2} = 5{,}590...$$

Die Gleichung des Kreises lautet demnach:

$$(x - ½)^2 + (y + 5)^2 = \frac{125}{4}$$

Lösung Aufgabe 5b, KSR GF07

b1)



Es ist $\frac{x^3 - 8}{x^2} = x - \frac{8}{x^2}$, also ist **y = x** die Gleichung einer schiefen Asymptoten.
Vertikale Asymptote: **x = 0** (y-Achse)

b2) $\int_0^b x\,dx - \int_2^b \left(x - \frac{8}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b - \left[\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right]_2^b = \frac{b^2}{2} - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{8}{b} - 2 - 4\right) = -\frac{8}{b} + 6$

Für $b \to \infty$ erhält man für den Wert des uneigentlichen Integrals **6** .