Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1: Komplexe Funktionen (10 Punkte)

a) $f : C \to C : z \mapsto iz + 3 + 2i$ Nullstellen: $iz + 3 + 2i = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z}} = \frac{-3-2i}{i} = (-3-2i)(-i) = \underline{\underline{-2+3i}}$

Fixpunkte: $iz + 3 + 2i = z \Rightarrow (-1+i)z + 3 + 2\imath = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z}} = \frac{3+2i}{1-i} = -\frac{(3+2i)(1+i)}{1^2+(-1)^2} = \frac{1+5i}{2} = \underline{\underline{0.5+2.5i}}$

$h : C \setminus \{0\} \to \mathrm{C} : \mathrm{z} \mapsto \frac{-2}{\mathrm{z}} + 2$ Nullstellen: $\frac{-2}{\mathrm{z}} + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z=1}}$

Fixpunkte: $\frac{-2}{\mathrm{z}} + 2 = z \Rightarrow -2 + 2z = z^2 \Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$, $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 = d^2$

$\Rightarrow d_0 = 2i \Rightarrow z_{1/2} = \frac{2 \pm d_0}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \Rightarrow \underline{\underline{z_1 = 1-i}}$; $\underline{\underline{z_2 = 1+i}}$

b) $f(z) = h(z) \Rightarrow iz + 3 + 2i = \frac{-2}{\mathrm{z}} + 2 \Rightarrow iz^2 + (3+2i)z = -2 + 2z \Rightarrow iz^2 + (1+2i)z + 2 = 0$

$D = (1+2i)^2 - 4i \cdot 2 = -3 + 4i - 8i = -3 - 4i \Rightarrow |D| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

D liegt im 3. Quadranten $\Rightarrow \varphi = 180° + arg(D) = 180° + arctan(\frac{4}{3}) \cong 180° + 53.13° = 233.13°$

$\Rightarrow D = 5e^{i \cdot 233.13°} = d^2 \Rightarrow d_0 = \sqrt{5}e^{i \cdot \frac{233.13°}{2}} = \sqrt{5}(cos(\frac{233.13°}{2}) + i\, sin(\frac{233.13°}{2})) = -1 + 2i$

$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{-(1+2i) \pm d_0}{2i} = \frac{-1-2i \pm (-1+2i)}{2i} \Rightarrow \underline{\underline{z_1}} = \frac{-2}{2i} \underline{\underline{= i}}, \underline{\underline{z_2}} = \frac{-4i}{2i} \underline{\underline{= -2}}$

c) $q_1 = 1 - \imath$; $q_2 = 1 + \imath$

$\underline{g = (q_1 q_2)}$: $Re(z) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = 1 \Rightarrow z + \bar{z} - 2 = 0$

h(g): $h(\mathrm{z}) = \frac{-2}{\mathrm{z}} + 2 = w \Rightarrow z = \frac{-2}{\mathrm{w}-2}$ und $\bar{z} = \frac{-2}{\overline{\mathrm{w}}-2}$

$\overset{g:}{\Rightarrow} \frac{-2}{\mathrm{w}-2} + \frac{-2}{\overline{\mathrm{w}}-2} - 2 = 0 \quad | \cdot (-\frac{1}{2})(w-2)(\overline{w}-2) \Rightarrow \overline{\mathrm{w}} - 2 + \mathrm{w} - 2 + (\mathrm{w}-2)(\overline{\mathrm{w}}-2) = 0$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{w}} - 2 + \mathrm{w} - 2 + \mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} - 2\overline{\mathrm{w}} - 2\mathrm{w} + 4 = 0 \Rightarrow \mathrm{w}\overline{\mathrm{w}} - \overline{\mathrm{w}} - \mathrm{w} = 0 \Rightarrow (\mathrm{w}-1)(\overline{\mathrm{w}}-1) - 1 = 0$

$\Rightarrow |\mathrm{w}-1|^2 = 1 \Rightarrow |\mathrm{w}-1| = 1$

h(g) ist ein Kreis mit Mittelpunkt bei $m = 1 + 0i$ und Radius 1.

d) x-Achse: $y = 0 \Rightarrow Im(w) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2i}(w - \overline{w}) = 0 \Rightarrow w - \overline{w} = 0$

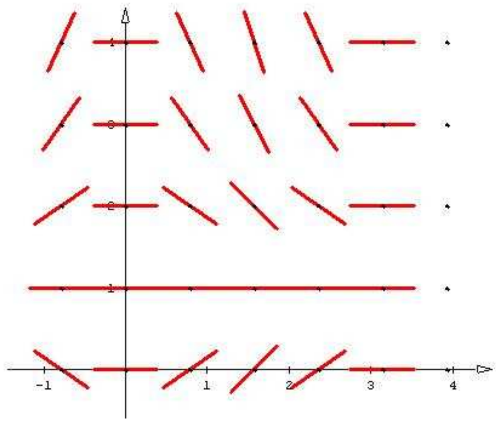
$f^{-1}(x - Achse)$: $f(z) = iz + 3 + 2i = w \Rightarrow -i\bar{z} + 3 - 2i = \overline{w}$

$\overset{x-Achse:}{\Rightarrow} iz + 3 + 2i - (-i\bar{z} + 3 - 2i) = 0 \Rightarrow iz + i\bar{z} + 4i = 0 \Rightarrow z + \bar{z} + 4 = 0 \Rightarrow x + iy + x - iy + 4 = 0$

$\Rightarrow x = -2$, $f^{-1}(x - Achse)$ ist eine Parallele zur y-Achse durch $x = -2$.

Aufgabe 2: Differenzialgleichungen (10 Punkte)

a) $y'=(1-y)sin(x)$ Richtungsfeld:



$x=-\frac{\pi}{4}$: $y'=(1-y)(-\frac{\sqrt{2}}{2})\cong 0.707\cdot(y-1)$

$x=0$: $y'=(1-y)\cdot 0=0$

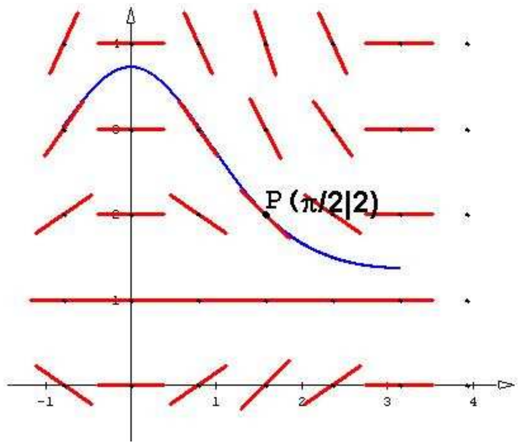
$x=\frac{\pi}{4}$: $y'=(1-y)\frac{\sqrt{2}}{2}\cong -0.707\cdot(y-1)$

$x=\frac{\pi}{2}$: $y'=(1-y)\cdot 1=-(y-1)$

$x=\frac{3\pi}{4}$: $y'=(1-y)\frac{\sqrt{2}}{2}\cong -0.707\cdot(y-1)$

$x=\pi$: $y'=(1-y)\cdot 0=0$

b)



c) Isoklinenschar mit Steigung k als Scharparameter:

$k=(1-y)sin(x)\Rightarrow \frac{k}{sin(x)}=1-y\Rightarrow y=-\frac{k}{sin(x)}+1\Rightarrow \underline{\underline{f_k(x)=-\frac{k}{sin(x)}+1}}$

(Die Funktionenschar ist nur für $x\neq z\cdot\pi\ \forall z\in Z$ definiert. Für $k=0$ kann man an den undefinierten Stellen für die y-Koordinate irgendeinen Wert wählen. Diese Punkte mit $k=0$ können natürlich nicht als Punkte eines Funktionsgraphen aufgefasst werden.

$k=0$: $f_0(x)=1,\ x\neq z\cdot\pi\ \forall z\in Z$; Menge der Punkte mit Steigung $k=0$:

$\{(x;y)|(\forall z\in Z: x\neq z\cdot\pi)\wedge y=1\}\cup\{(x;y)|(\exists z\in Z: x=z\cdot\pi,)\wedge y\in IR\}$)

d) $y'=(1-y)sin(x)\ \Rightarrow\ y'=-sin(x)y+sin(x)\ \Rightarrow$ hom. DGL: $y'=-sin(x)y$

Sep. der Var.: $\frac{dy}{dx}=-sin(x)y\Rightarrow\frac{1}{y}dy=-sin(x)dx\Rightarrow\int\frac{1}{y}dy=\int(-sin(x))dx$

$\Rightarrow ln|y|=cos(x)+\tilde{C},\ \tilde{C}\in IR\Rightarrow|y|=e^{cos(x)}\cdot e^{\tilde{C}},\ \tilde{C}\in IR\Rightarrow \underline{\underline{y_H=Ce^{cos(x)},\ C\in IR}}$ (da auch $y=0$ die hom. DGL erfüllt).

e) part. Lös. von $y'=-sin(x)y+sin(x)$, Ansatz : $y_p=C(x)\cdot e^{cos(x)}$

$\overset{DGL}{\Rightarrow}\ C'(x)\cdot e^{cos(x)}+C(x)(-sin(x)e^{cos(x)}=-sin(x)C(x)\cdot e^{cos(x)}+sin(x)\Rightarrow C'(x)\cdot e^{cos(x)}=sin(x)$

$\Rightarrow C'(x)=\frac{sin(x)}{e^{cos(x)}}=sin(x)e^{-cos(x)}\Rightarrow C(x)=\int sin(x)e^{-cos(x)}dx$, Subst: $u=-cos(x)$, $du=sin(x)dx$

$\Rightarrow C(x)=\int sin(x)e^{-cos(x)}dx=\int e^u du=e^u(+D,D\in IR)=e^{-cos(x)}(+D,D\in IR)$

$\Rightarrow \underline{\underline{y_p}}=C(x)\cdot e^{cos(x)}=e^{-cos(x)}\cdot e^{cos(x)}\underline{\underline{=1}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{y}}=y_H+y_p=\underline{\underline{C\cdot e^{cos(x)}+1,\ C\in IR}}$

f) $P(\frac{\pi}{2}|2)\ \Rightarrow\ y(\frac{\pi}{2})=2\Rightarrow C\cdot e^{cos(\frac{\pi}{2})}+1=2\Rightarrow C\cdot e^0+1=2\Rightarrow C=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{y=e^{cos(x)}+1}}$

Aufgabe 3: Unabhängige Aufgaben (10 Punkte)

a) $\alpha(\vec{x})=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, Fixelemente: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\vec{x}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left|\begin{array}{r} -x-\frac{3}{2}y=-3\\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=-1\end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l}2x+3y=6\\2x+3y=6\end{array}\right|$ Die Gleichungen sind lin. abhängig, also besitzt α die Fix-punktgerade $\underline{\underline{a: 2x+3y=6}}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix: $\begin{pmatrix}-\lambda & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}-\lambda\end{pmatrix}\vec{e}=\vec{0}$ mit

$-\lambda(\frac{1}{2}-\lambda)-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2\lambda^2-\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$

$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2},\ \lambda_2=1$

$\lambda_1=-\frac{1}{2}: \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\vec{e}_1=\vec{0} \stackrel{z.B.}{\Rightarrow} \vec{e}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ \lambda_2=1: \ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ parallel zur Fixpunktgerade

Die Fixgeraden haben die Richtung $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und gehen durch jeden Punkt der Fixpunktgerade $a: 2x+3y=6$. ($f_u: \vec{x}=\begin{pmatrix}u\\ -\frac{2}{3}u+2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$)

b) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^{-2},\ f'(x)=-2(x+1)^{-3},\ f''(x)=6(x+1)^{-4}$

$\Rightarrow f^{(i)}(x)=(-1)^i(i+1)!(x+1)^{-(i+2)} \Rightarrow f^{(i)}(0)=(-1)^i(i+1)!$

$\underline{\underline{p(x)}}=p(0+x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(i+1)!}{i!}x^i=\underline{\underline{\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(i+1)x^i}}$

Konv.bereich ID: $\lim_{i\to\infty}\left|\frac{(-1)^{i+1}(i+2)}{(-1)^i(i+1)}\right|=\lim_{i\to\infty}\left|\frac{i+2}{i+1}\right|=1 \Rightarrow$ Konv.radius R=1 $\Rightarrow \underline{\underline{ID=\,]-1;1[}}$

Bei beiden Rändern divergiert p(x).
Restgliedbetrachtung für x>0:

$R_{n+1}(0+x)=\frac{x^{n+1}}{n!}(1-\eta)^n f^{(n+1)}(0+\eta x)=\frac{x^{n+1}}{n!}(1-\eta)^n(-1)^{n+1}(n+2)!(\eta x+1)^{-(n+3)}$

$=(-1)^{n+1}x^{n+1}(1-\eta)^n(n+1)(n+2)(\eta x+1)^{-(n+3)}=(-1)^{n+1}x^{n+1}(1-\eta)^n(n^2+3n+2)(\eta x+1)^{-(n+3)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|R_{n+1}(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|x^{n+1}(1-\eta)^n(n^2+3n+2)(\eta x+1)^{-(n+3)}\right|$

$=(\eta x+1)^{-3}\lim_{n\to\infty}\left|x^{n+1}(1-\eta)^n(n^2+3n+2)(\eta x+1)^{-n}\right|=0\cdot 0\cdot 0=0$

da $0<x<1,\ 0<1-\eta<1$ und $\eta x+1>1 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(i+1)x^i \quad \forall x\in\,]0;1[$

Aufgabe 4: Magnetismus (7 Punkte)

a) Richtung der Lorentzkraft: senkrecht zur Bewegungsrichtung stets nach rechts (zum Kreismittelpunkt)

b) Richtung des Magnetfeldes: senkrecht zur Blattebene, aus der Blattebene heraus.

c) Zentralkraft = Lorentzkraft: $\frac{m_{Hg} \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$

→ $r = \frac{m_{Hg} \cdot v}{e \cdot B}$ → $B = \frac{m_{Hg} \cdot v}{e \cdot r} = 0.130\text{T}$

d) Elektrische Kraft = Lorentzkraft: $e \cdot E = e \cdot v \cdot B$

→ $E = v \cdot B = 3250 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

Richtung: in der Blattebene, senkrecht nach oben.

Aufgabe 5: Wärmelehre (8 Punkte)

m = 0.112kg; V_1 = 0.1m^3; p_1 = 100'000Pa

a) Molare Masse: $M_m = 0.028 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$; Stoffmenge: $n = \frac{m}{M_m} = 4\text{mol}$

$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$ → $T_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{n \cdot R} = 301\text{K}$

b) $Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T = 5810\text{J}$ mit $c_p = 1038 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

c) isobar: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ → $V_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot V_1 = 0.1166\text{m}^3$ mit T_2 = 351K

→ $W = -p_1 \cdot \Delta V = -p_1 \cdot (V_2 - V_1) = -1660\text{J}$

d) $\Delta U = W + Q = +4150\text{J}$, Zunahme

Aufgabe 6: Relativitätstheorie (7 Punkte)

Verwendete Einheiten: v in c, t in a, x in Lichtjahren (→ c = 1)

→ v = 0.5c; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.5^2}} = 1.155$

Ereignis B in S: $x_B = 6$; $t_B = 0$

Ereignis B in S': $x_B' = \gamma \cdot (x_B - v \cdot t_B) = \gamma \cdot 6 = 6.93$

$t_B' = \gamma \cdot \left(t_B - \frac{v}{c^2} \cdot x_B \right) = -\gamma \cdot 0.5 \cdot 6 = -3.47$

Ereignis C in S: $x_C = 2$; $t_C = 4$ (Strecke zwischen X und Y im Verhältnis 1:2 teilen)

Ereignis C in S': $x_C' = 0$ (im Raumschiff)

Kontrolle: $x_C' = \gamma \cdot (x_C - v \cdot t_C) = \gamma \cdot (2 - 0.5 \cdot 4) = 0$

$t_C' = \gamma \cdot \left(t_C - \frac{v}{c^2} \cdot x_C \right) = \gamma \cdot (4 - 0.5 \cdot 2) = 3.47$

Aufgabe 7: Kernphysik (8 Punkte)

m_{Person} = 65kg; A_0 = 8000Bq

a) Fundamentum: Zerfallsart: β^-, $T_{1/2} = 5.271\text{a} = 1.66 \cdot 10^8\,\text{s}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} = 4.17 \cdot 10^{-9}\,\text{s}^{-1} = 0.132\text{a}^{-1}$,

$E_{Zerfall} = 2.824\text{MeV} = 4.52 \cdot 10^{-13}\,\text{J}$

b) ${}^{60}_{27}Co \quad \rightarrow \quad {}^{60}_{28}Ni + e^- + \bar{\nu}$

c) t = 1a = $3.16 \cdot 10^7$s → $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 7010\text{Bq}$

d) $N_0 = \dfrac{A_0}{\lambda} = 1.92 \cdot 10^{12}$

Anzahl Kerne nach einem Jahr: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1.68 \cdot 10^{12}$

→ Zerfallene Kerne: $\Delta N = N_0 - N = 2.37 \cdot 10^{11}$

→ absorbierte Energie: $E = \Delta N \cdot E_{Zerfall} = 0.107\text{J}$

→ Energiedosis: $D = \dfrac{E}{m_{Person}} = 0.00165\text{Gy} = 1.65\text{mGy}$

→ Äquivalentdosis: $H = q \cdot D = 1.65\text{mSv}$ mit q = 1.