Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1 (8 Punkte)

$xy' + 2y = \sin x \quad (x \neq 0)$

a) $y' := k$ = konstant $\quad 2y = -kx + \sin x$

$$\underline{\underline{y = -\frac{k}{2}x + \frac{\sin x}{2}}}$$

für $y':=0$: $\quad \underline{\underline{y = \frac{\sin x}{2}}}$

b) Homogene DGL: $y' = -2\frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

$\ln|y| + \ln C^* = -2\ln|x|$, also $|C^*y| = |x^{-2}|$

Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung $\underline{y = C\cdot x^{-2}}$ $\quad (C \in \mathbb{R})$

c) Ansatz: $y_0 = C(x)\cdot x^{-2}$, damit $y_0' = C'(x)\cdot x^{-2} - 2C(x)\cdot x^{-3}$

eingesetzt in inhomogene DGL: $C'(x)\cdot x^{-1} - 2C(x)\cdot x^{-2} + 2C(x)\cdot x^{-2} = \sin x$
Also ist $C'(x) = x \sin x$
Integration mit TI Voyage (bzw. partielle Integration) liefert $C(x) = \sin x - x\cos x$
Daher ist $\underline{\underline{y_0 = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}}}$

d) Lösungsgesamtheit der inhomogenen Gleichung $\underline{\underline{y = \frac{C + \sin x - x\cos x}{x^2}}}$ $\quad (C \in \mathbb{R})$

e) Punkt $P(\pi|0) \in$ Graph G_f: $\quad 0 = C + 0 - \pi\,(-1)$, also $C = -\pi$

$$\underline{\underline{y = f(x) = \frac{-\pi + \sin x - x\cos x}{x^2}}}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

$$w = f(z) = \frac{2z - i}{z - i}$$

a) Definitionsmenge $\underline{D = \mathbb{C} \setminus \{i\}}$

für f^{-1}: $\quad z\,w - i\,w = 2z - i$
$\quad z(w - 2) = -i + i\,w$

$z = \dfrac{i(w-1)}{w-2}$, also ist die Wertemenge $\underline{W = \mathbb{C} \setminus \{2\}}$

b) g: $z = \bar{z}$, g' = f(g)

$$\frac{i(w-1)}{w-2} = \frac{-i(\bar{w}-1)}{\bar{w}-2}$$

$(w - 1)(\bar{w} - 2) = (w - 2)(1 - \bar{w})$

$2w\bar{w} - 3w - 3\bar{w} + 4 = 0$

$(w - 1.5)(\bar{w} - 1.5) = 0.25$

$\underline{g'\text{: } |w - 1.5| = 0.5}$

Schreibweise: A(x+iy) bedeutet Punkt A(x|y).
g' ist also Kreis mit Mittelpunkt M(1.5) und Radius 0.5.

c) h': $|w - 1| = 1$, $f^{-1}(h') = h$

h': $(w - 1)(\bar{w} - 1) = 1$

Also git für h:

$$\left(\frac{2z - i}{z - i} - 1\right)\left(\frac{2\bar{z} + i}{\bar{z} + i} - 1\right) = 1$$

$$\frac{2z - i}{z - i} \cdot \frac{2\bar{z} + i}{\bar{z} + i} - \frac{2z - i}{z - i} - \frac{2\bar{z} + i}{\bar{z} + i} = 0$$

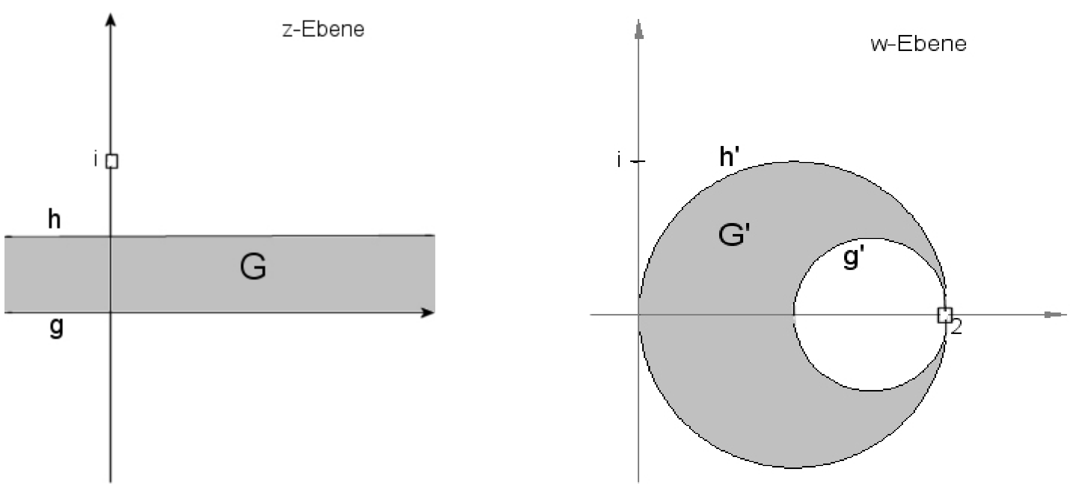
$4z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} ++ 1 - 2z\bar{z} + i\bar{z} - 2iz - 1 - 2z\bar{z} + 2i\bar{z} - iz - 1 = 0$

h: $-iz + i\bar{z} - 1 = 0$, bzw. $\underline{h\text{: } y = 0.5}$, also ist h die Parallele zur reellen Achse durch P(0.5i).

Einfachere Lösungsvariante: $\left|\dfrac{2z-i}{z-i} - 1\right| = 1$, also $\left|\dfrac{2z-i-z+i}{z-i}\right| = 1$

Daher gilt für h: $|z| = |z - i|$
Also ist h Mittelsenkrechte von O(0) und B(i)

d)



Aufgabe 3 (8 Punkte)

a) Abbildungsdeterminante Δ = -a – 4 := 0. Für <u>a = -4</u> ist f_a also keine Affinität.

b) Da $\begin{pmatrix} a-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, so muss <u>a = -1</u> sein.

Die Abbildungsgleichungen lauten also: <u>x' = -x + 2y</u> und <u>y' = 2x - y</u>

Affinitätsrichtung r || $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und Affinitätsachse s: x - y = 0, bzw. <u>s: y = x</u>

Für den Normalenvektor $\vec{n}_S$ von s gilt $\vec{n}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ || r. Also ist f_{-1} normale Affinität.

c) f^{-1}: Aus x' + 2y' = 3x und 2x' + y' = 3y folgt $\underline{\underline{x = \frac{x'+2y'}{3}}}$ und $\underline{\underline{y = \frac{2x'+y'}{3}}}$

d) Da S(1|0) und Q(2|2) $\in$ Parabel p, so ist p nach rechts geöffnet.
Ansatz: $y^2 = 2p(x-1)$ mit Parameter p>0
Q $\in$ Parabel p: 4 = 2p · 1, also p = 2.
Parabel p: $\underline{y^2 = 4(x-1)}$

e) x und y aus c) einsetzen in Parabelgleichung bei d):

$\frac{1}{9}(2x' + y')^2 = \frac{4}{3}(x' + 2y' - 3)$

$\underline{4x'^2 + 4x'y' + y'^2 = 12x' + 24y' - 36}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Nullhypothese H_0: p = 0.28
Behauptung H_1: p > 0.28

Rechtsseitiger Test mit Signifikanzniveau α = 5%.
Stichprobenumfang n = 500
$\mu = np = 140$, $\sigma^2 = np(1-p) \approx 100.8$, $\sigma \approx 10.04$

Approximation mit X(μ,σ)-Normalverteilung:
Zuerst U(0,1)-Normalverteilung:

Aus $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.5 - \alpha = 0.45$ folgt mit TI Voyage u ≈ 1.6449

Verbesserte Näherungsformel: $u = \frac{x-\mu-0.5}{\sigma}$, also $x = \mu + \sigma u + 0.5 \approx 157.01$

Verwerfungsbereich gemäss Approximation V = [158,500], eventuell V = [157,500].

Kontrolle mit Binomialverteilung:
Mit Vorteil über Gegenwahrscheinlichkeit, da Zeitbedarf des TI Voyage sonst relativ gross:

$\sum_{x=0}^{157}\binom{500}{x}0.28^x 0.72^{500-x} \approx \underline{0.9581}$ $\qquad$ $\sum_{x=0}^{156}\binom{500}{x}0.28^x 0.72^{500-x} \approx 0.9487$

Also ist der Verwerfungsbereich <u>V = [158,500]</u> mit Fehler 1. Art ≈ 4.2%

Da die Testgrösse t = 156 $\notin$ V, so ist die Abweichung <u>nicht</u> signifikant.

Aufgabe 5: Gravitation (8 Punkte)

a) Bahnradius: r_1 = 550km + 6370km = $6.92\cdot10^6$m; Erdmasse: $m_E = 5.97\cdot10^{24}$kg

Zentripetalkraft = Gravitationskraft

$$\frac{m\cdot v^2}{r_1} = G\cdot\frac{m\cdot m_E}{r_1^2} \rightarrow v=\sqrt{G\cdot\frac{m_E}{r_1}} = 7590\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $T_1 = \frac{2\pi\cdot r_1}{v} = 5730\text{s} = 1\text{h}\,35.5\text{min}$

c) Grosse Bahnhalbachsen:
a_1 = 2·6370km + 2·550km = $1.384\cdot10^7$m
a_2 = 2·6370km + 550km + 1850km = $1.514\cdot10^7$m

Kepler III: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}}\cdot T_1 = 6560\text{s} = 1\text{h}\,49.3\text{min}$

d) Abstand zum Erdmittelpunkt im Apogäum: r_A = 6370km + 1850km = $8.22\cdot10^6$m
Abstand zum Erdmittelpunkt im Perigäum: r_P = 6370km + 550km = $6.92\cdot10^6$m

Energieerhaltung: $\frac{m\cdot v_A^2}{2} - G\cdot\frac{m\cdot m_E}{r_A} = \frac{m\cdot v_P^2}{2} - G\cdot\frac{m\cdot m_E}{r_P}$ (E)

Kepler II (Drehimpuls): $v_A\cdot r_A = v_P\cdot r_P$ (K)

(K) → $v_A = \frac{r_P}{r_A}\cdot v_P$ in (E) eingesetzt: $\frac{r_P^2}{r_A^2}\cdot\frac{m\cdot v_P^2}{2} - G\cdot\frac{m\cdot m_E}{r_A} = \frac{m\cdot v_P^2}{2} - G\cdot\frac{m\cdot m_E}{r_P}$

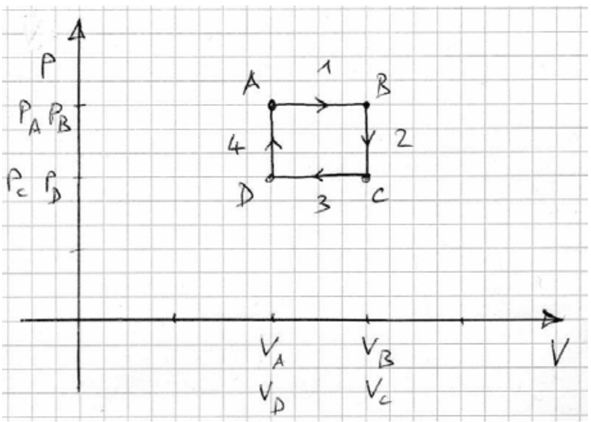
$$\rightarrow \left(\frac{r_P^2}{r_A^2}-1\right)\cdot v_P^2 = 2\cdot G\cdot m_E\cdot\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right) \rightarrow \frac{r_P^2-r_A^2}{r_A^2}\cdot v_P^2 = \frac{2\cdot G\cdot m_E\cdot(r_P-r_A)}{r_A\cdot r_P}$$

$$\rightarrow v_P^2 = \frac{2\cdot G\cdot m_E\cdot(r_P-r_A)}{r_A\cdot r_P}\cdot\frac{r_A^2}{r_P^2-r_A^2} \rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot m_E\cdot r_A}{(r_A+r_P)\cdot r_P}} = 7910\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_A = \frac{r_P}{r_A}\cdot v_P = 6660\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 6: Wärmelehre (8 Punkte)

a)



b) isobar: $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \rightarrow T_B = \frac{V_B}{V_A}\cdot T_A = 675\text{K}$;

$\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D}$ bzw. $\frac{V_B}{T_A} = \frac{V_A}{T_D} \rightarrow T_D = \frac{V_A}{V_B}\cdot T_A = 300\text{K}$

c) Druck in C, D: $\frac{p_C}{T_C} = \frac{p_B}{T_B}$ → $p_C = p_D = \frac{T_C}{T_B} \cdot p_B = 400'000\text{Pa}$

pro Arbeitstakt:

Arbeit: $W_1 = -p_A \cdot (V_B - V_A) = -60\text{J}$; $W_3 = -p_C \cdot (V_A - V_B) = 40\text{J}$

→ $W = W_1 + W_3 = -20\text{J}$

zugeführte Wärme: $Q_1 = C_p \cdot n \cdot (T_B - T_A) = 210\text{J}$; $Q_4 = C_V \cdot n \cdot (T_A - T_D) = 99.8\text{J}$

→ $Q = Q_1 + Q_4 = 309\text{J}$

Stickstoff: $C_p = 29.1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$; $C_V = C_p - R = 20.8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

→ Wirkungsgrad: $\eta = \frac{|W|}{Q} = 0.0647 = 6.47\%$

Aufgabe 7: Induktion (6 Punkte)

d = 0.038m; A = 3.2cm^2 = 3.2·10^{-4}m^2; N = 420; R_{Sp} = 1.2Ω

a) $B = \frac{\mu_0}{2\pi \cdot d} \cdot I = 1.05 \cdot 10^{-4}\,\text{T}$; $\Phi = B \cdot A = 3.37 \cdot 10^{-8}\,\text{Vs}$

$U_{ind} = N \cdot \frac{\Phi}{\Delta t} = 7.07 \cdot 10^{-5}\,\text{V}$; $I = \frac{U_{ind}}{R + R_{Sp}} = 1.20 \cdot 10^{-5}\,\text{A}$

b) Lenz'sche Regel: Ursache des Induktionsstromes = Zunahme des durch den Leiter erzeugten Magnetfeldes → Magnetfeld der Spule ist dem Magnetfeld des Leiters entgegen gesetzt gerichtet (aus der Blattebene heraus) → Richtung des Spulenstromes: im Gegenuhrzeigersinn.

c) Kein Strom, da sich der Fluss nicht ändert.

d) Durch bewegen der Spule (z.B. vom Leiter entfernen oder um eine in der Blattebene liegende Achse drehen).

Aufgabe 8: Differentialgleichungen, Wechselströme (8 Punkte)

Bemerkung: in den Zwischenrechnungen werden die Einheiten weggelassen.

a) $Z = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} = R + i \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = 25 - 22.5 \cdot i = 33.6 \cdot e^{-0.733 \cdot i}$

$|Z| = 33.6\Omega$; $\varphi = \arg(Z) = -0.733\text{rad} = -42°$

$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|Z|} = 0.595\text{A}$

b) $\tilde{I} = \frac{1}{Z} \cdot \tilde{U} = \frac{1}{Z} \cdot \hat{U} = 0.595 \cdot e^{0.733 \cdot i}$

$\tilde{U}_C = Z_C \cdot \tilde{I} = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \cdot \tilde{I} = -62.5 \cdot i \cdot 0.595 \cdot e^{0.733 \cdot i} = 37.2 \cdot e^{-0.838 \cdot i}$

→ $\hat{U}_C = 37.2\text{V}$; $\varphi_C = -0.838\text{rad} = \text{-}48°$

c) Maschenregel: $U(t) = U_R + U_L + U_C = R \cdot I + L \cdot \dot{I} + U_C = R \cdot \dot{Q} + L \cdot \ddot{Q} + U_C$

mit $Q = C \cdot U_C$: $U(t) = R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C$

→ DGL für $U_C(t)$: $\ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C = \frac{\hat{U}}{L \cdot C} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

DGL der erzwungenen Schwingung mit:

$\omega_0{}^2 = \frac{1}{L \cdot C} = 250'000\text{s}^{-2}$; $\delta = \frac{R}{2 \cdot L} = 125\text{s}^{-1}$; $A = \frac{\hat{U}}{L \cdot C} = 5 \cdot 10^6\,\text{Vs}^{-2}$

$$\hat{U}_C = \frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2}} = 37.2\text{V}$$