Komplexe Zahlen

1. Bedarfsfrage

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (Peano-Axiome)
Aber: $a + x = b$ ist nur lösbar, falls $b > a$

1. Erweiterung: Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$a + x = b$ ist lösbar in $\mathbb{Z}$, nämlich $x = b + (-a) = b - a$
Aber: $a \cdot x = b$ nur lösbar, falls a ein Teiler von b ist.

2. Erweiterung: Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$a \cdot x = b$ lösbar in $\mathbb{Q}$, nämlich $x = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$

Aber: $x^2 = c$ nur lösbar, falls $c = \frac{p^2}{q^2}$

3. Erweiterung: $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen (mit Hilfe von Intervallschachtelungen)
Aber: $x^2 = c$ nur lösbar, falls $c \geq 0$

4. Erweiterung: $\mathbb{C}$: Menge der komplexen Zahlen
$x^2 = c$ lösbar in $\mathbb{C}$, nämlich ??

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Also soll auch gelten: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Die Menge $\mathbb{C}$

Definition: $\mathbb{C} = \{ z \mid z = (x,y),\ x, y \in \mathbb{R} \}$, d.h. $\mathbb{C}$ ist die Menge aller geordneten Paare von reellen Zahlen.
x: Realteil von z: $x = \text{Re}(z)$
y: Imaginärteil von z: $y = \text{Im}(z)$ (Beachte also: $\text{Im}(z) \in \mathbb{R}$)
$(1,0) := 1$ reelle Einheit
$(0,1) := i$ imaginäre Einheit

Man kann (mit Hilfe der Definition von + und $\cdot$ in $\mathbb{C}$, s. später) zeigen:
z kann in der Form $\mathbf{z = x + i\,y}$ geschrieben werden (sog. Normalform oder kartesische Form)

Beispiele: $z = (0,1) = 0 + 1i = i$
$\text{Re}(-4 + 5i) = -4$, $\text{Im}(-4 + 5i) = 5$, $\text{Re}(i) = 0$, $\text{Im}(i) = 1$

3. Das Rechnen mit den komplexen Zahlen

Seien nun $z_1 = x_1 + i\,y_1$ und $z_2 = x_2 + i\,y_2$ zwei komplexe Zahlen

Definition der Addition: $z_1 + z_2 = x_1 + i\,y_1 + x_2 + i\,y_2 := x_1 + x_2 + i\,(y_1 + y_2)$
Man addiert also Realteil und Imaginärteil

Definition der Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1) \cdot (x_2 + i\,y_2) := x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Definition der Gleichheit: $z_1 = z_2$, falls $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$
(Realteile und Imaginärteile müssen gleich gross sein)

Beispiele: (s. auch Applet auf www.mathematik.ch)
1) $(3 + 4i) + (-1 + 1i) = \underline{2 + 5i}$

2) $(3 + 4i) \cdot (-1 + 1i) = \underline{-7 - i}$

3) $(0 + i) \cdot (0 + i\,) := i^2 = \underline{-1}$

4) $(a + 0i) \cdot (b + 0i) = \underline{ab}$

5) $(y + 0i) \cdot (0 + i) = \underline{yi}$

6) $(x + 0i) + (0 + yi) = \underline{x + yi}$

Berücksichtigt man das Resultat $\boxed{i^2 = -1}$ in der Definition der Multiplikation so erkennt man:

Komplexe Zahlen können multipliziert werden, indem man das Distributivgesetz anwendet und $i^2 = -1$ setzt.

Beispiel: $(5 - 7i)\,(18 + 3i) = 5 \cdot 18 - 21 \cdot i^2 + 5 \cdot 3i - 7 \cdot 18i = \underline{111 - 111i}$

Subtraktion: $z = z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$

Ist also $z_1 = x_1 + i\,y_1$ und $z_2 = x_2 + i\,y_2$, so gilt
$z_1 - z_2 = x_1 + i\,y_1 - x_2 - i\,y_2 = x_1 - x_2 + i\,(y_1 - y_2)$

Beispiel: $(5 - 7i) - (18 + 3i) = \underline{-13 - 10i}$

Division: Was ist $z_1 = 1 : z$? $(z \neq 0)$

Ist $z = a + bi$, so sucht man also eine Zahl $z_1 = x + iy$ so, dass $(x + iy)\,(a + bi) = 1$ ist.
$(x + iy)\,(a + bi) = ax - by + (ay + bx)i = 1 + 0i$.
Wegen der Gleichheit von zwei komplexen Zahlen hat man daher das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen.

Die Lösung dieses Systems ist: $x = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$ $(a, b \neq 0)$

Rechnet man $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{1}{a+bi}\cdot\dfrac{a-bi}{a-bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, so erhält man dasselbe Resultat!

Definition: Die zur Zahl $z = a + bi$ gehörende Zahl $\bar{z} = a - bi$ heisst **konjugiert komplex.**

Man dividiert also komplexe Zahlen, indem man den Quotienten mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert!

Beispiele:

1) $\dfrac{8+2i}{4-i} = \dfrac{8+2i}{4-i}\cdot\dfrac{4+i}{4+i} = \dfrac{32-2+16i}{16+1} = \dfrac{30+16i}{17} = \underline{\dfrac{30}{17}+\dfrac{16}{17}i}$

2) $\dfrac{(5+5i)-(5-5i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{10i}{5} = \underline{2i}$

Eigenschaften von konjugiert komplexen Zahlen: $(z = a + bi)$

1. $z\cdot\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} \geq 0$
2. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ (Beweise als Aufgabe)

Lösen von Gleichungen

Da die algebraische Struktur $\langle\mathbb{C}; +, \cdot\rangle$ ein Körper ($\langle\mathbb{C}; +\rangle$ kommutative Gruppe, $\langle\mathbb{C}\setminus\{0\}; \cdot\rangle$ kommutative Gruppe, Distributivgesetz gilt) ist, so kann man Gleichungen analog wie in der Menge $\mathbb{R}$ auflösen:

Beispiele:

1) $(2 + i)z - (5 + 2i) = 8 - 3i$

$z = \dfrac{13-i}{2+i} = \dfrac{13-i}{2+i}\cdot\dfrac{2-i}{2-i} = \underline{5-3i}$

2) $z^2 = -50 = 50\,i^2$ $z_1 = \underline{5\sqrt{2}\,i}$, $z_2 = \underline{-5\sqrt{2}\,i}$

3) $z^2 + 4z + 5 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm d}{2}$$, wobei $d^2 = -4$. Also $d_1 := d = 2i$, $d_2 = -2i$

Die Lösung $d_2 = -2i$ ist wegen $\pm$ bereits enthalten. $z_1 = \underline{-2 + i}$, $z_2 = \underline{-2 - i}$

4) $z^2 = -32 + 24i$

Der Ansatz $z = x + iy$ führt wegen $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ auf das Gleichungssystem

$x^2 - y^2 = -32$

$2xy = 24$

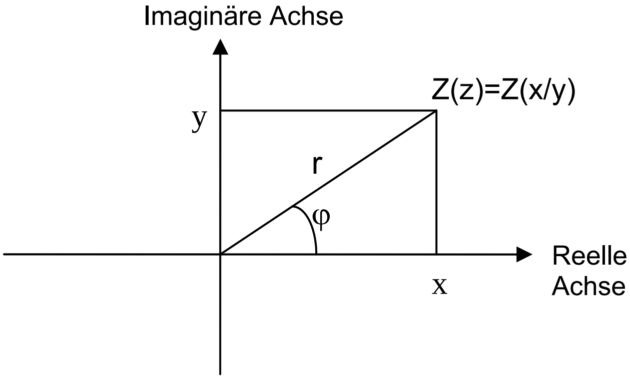
Dieses führt auf die biquadratische Gleichung $x^4 + 32x^2 - 144 = 0$ in $\mathbb{R}$.
Da $x_1^2 = 4$ und $x_2^2 = -36$, so sind in $\mathbb{R}$ (!) nur die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ zulässig. Die dazugehörigen y-Werte heissen $y_1 = 6$ und $y_2 = -6$.

Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind daher:
$z_1 = \underline{2 + 6i}$, $z_2 = \underline{-2 - 6i} = -z_1$

(eine einfachere Lösungsmöglichkeit: s. später mit Polarformdarstellung von z)

4. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen in der Gauss-Ebene

Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ kann durch einen Punkt Z(x/y) in der Ebene dargestellt werden. In diesem Fall nennt man die Ebene die Gauss'sche Zahlenebene.



Jede komplexe Zahl ist auch bestimmt durch die Polarkoordinaten (r, φ) des Punktes Z(x/y). Gemäss den Umrechnungsformeln gilt: $0 \leq \varphi < 2\pi$ (bzw. $0° \leq \varphi < 360°$)

Betrag von z := $|z|$ **:= r =** $\sqrt{x^2 + y^2}$ **, tan** $\varphi = \dfrac{y}{x}$ **(**$x \neq 0$**)**

(für Bestimmung des Argumentes φ: Quadrantenlage beachten!)

$\mathbf{x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi}$

(nach Definitionen der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel)

Es gilt also: $\mathbf{z = x + iy = r \cos \varphi + i\, r \sin \varphi := r\, cis\, \varphi := r\, e^{i\varphi}}$

Gleichheit von komplexen Zahlen in Polarform:
$r_1 \text{ cis } \varphi_1 = r_2 \text{ cis } \varphi_2 \iff r_1 = r_2$ und $\varphi_2 = \varphi_1 + k\, 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$0 \text{ cis } \varphi_1 = 0 \text{ cis } \varphi_2 = 0$ für beliebige φ_1, φ_2

4. Die Rechenoperationen in der Gauss-Ebene

Sei $z_1 = r_1 \text{ cis } \varphi_1$, $z_2 = r_2 \text{ cis } \varphi_2$ und $z = r \text{ cis } \varphi$

a) Addition

$$z = z_1 + z_2 = r_1 \text{ cis } \varphi_1 + r_2 \text{ cis } \varphi_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + i(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2)$$

Die Addition erfolgt also 'komponentenweise' (vergleiche "Vektoraddition" von Vektoren in der Grundebene)
Das Resultat in Polarform $r = \ldots$ und $\varphi = \ldots$ ist kompliziert!

b) Multiplikation

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 &= r_1 \text{ cis } \varphi_1 \cdot r_2 \text{ cis } \varphi_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + i\, r_1 \sin \varphi_1) \cdot (r_2 \cos \varphi_2 + i\, r_2 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i\, r_1 r_2 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 (\text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)) = r \text{ cis } \varphi \end{aligned}$$

Bei Multiplikationen komplexer Zahlen in Polarform werden also die Beträge multipliziert und die Argumente addiert:
$r = r_1 r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Dies rechtfertigt auch die Schreibweise für $z = r\, e^{i\varphi}$:
$z = r_1\, e^{i\varphi 1} \cdot r_2\, e^{i\varphi 2} = r_1 r_2\, e^{i(\varphi 1 + \varphi 2)}$

c) Subtraktion

$z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ "Vektorsubtraktion"

d) Division

$z = \dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ Da also $z \cdot z_2 = z_1$, so muss gelten:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ cis } (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Beispiele: $z_1 = 5 \text{ cis } 30°$, $z_2 = 2 \text{ cis } 10°$ (s. auch Applet auf www.mathematik.ch)

1) $z = z_1 + z_2 = 5 \cos 30° + 2 \cos 10° + i\,(5 \sin 30° + 2 \sin 10°) \approx$
$\approx 6.2297 + 2.847\, i \approx \underline{6.913 \text{ cis } (24.32°)}$

(Die Addition erfolgt also in Normalform mit anschliessender Umrechnung in Polarform!)

2) $z = z_1 \cdot z_2 = \underline{10 \text{ cis } 40°}$

3) $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \underline{2.5 \text{ cis } 20°}$

4) $z = \dfrac{z_2}{z_1} = 0.4 \text{ cis } (-20°) = \underline{0.4 \text{ cis } 340°}$ (Argument zwischen 0° und 360°)

e) Potenzieren

$z = r \text{ cis } \varphi \rightarrow$ (wegen Multiplikation) $z^n = r^n \text{ cis } (n\varphi)$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ (wegen Division) $\dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1 \text{ cis } 0°}{r^n \text{cis}(n\varphi)} = \dfrac{1}{r^n} \text{ cis } (-n\varphi)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zusammengefasst: $z = r \text{ cis } \varphi \rightarrow$ $\mathbf{z^k = r^k \textbf{ cis}(k\varphi)}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(Formel von Moivre)

Spezialfall: $r = |z| = 1$: $(\text{cis } \varphi)^k = \mathbf{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)}$

Beispiele:

1) $(2 \text{ cis } 30°)^5 = \underline{32 \text{ cis } 150°}$

2) $(\sqrt{3} + i)^6 = \ldots$ mit binomischem Lehrsatz … selber!
$(\sqrt{3} + i)^6 = (2 \text{ cis } 30°)^6 = 64 \text{ cis } 180° = \underline{-64}$

3) $(1 + i)^{10} = (\sqrt{2} \text{ cis } 45°)^{10} = 2^5 \text{ cis } 450° = 32 \text{ cis } 90° = \underline{32\, i}$

4) $\sin 3\varphi = ?$ $\cos 3\varphi = ?$

Formel von Moivre für $r = |z| = 1$ und $k = 3$:
$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \underline{\cos 3\varphi} + i\, \underline{\sin 3\varphi}$

Nach binomischem Lehrsatz:
$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3\, i \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3\, i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi =$
$= (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) + i\, (3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$

Also gilt wegen Gleichheit komplexer Zahlen in Normalform:

$\underline{\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}$; $\underline{\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi}$

f) Radizieren

Lösungen der Gleichung $z^n = a = r \text{ cis } \varphi$ für $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$?

Sei $z = s \text{ cis } \psi$ $s = ?$, $\psi = ?$

Potenzieren: $z^n = s^n \text{ cis}(n\psi) = a = r \text{ cis } \varphi$

Gleichheit in Polarform: $s^n = r$ und $n\psi = \varphi + k\,2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Daher gilt: $s = \sqrt[n]{r}$ und $\psi = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$

Es gibt aber nicht beliebig viele ψ, sondern **genau n**:

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$

> Die Gleichung $z^n = a = r \text{ cis } \varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ hat **genau** n Lösungen $z := \sqrt[n]{a}$, nämlich
>
> $$z_k = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \text{ wobei } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Bemerkungen:

1. Diese Lösungen haben alle denselben Betrag $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, unterscheiden sich also nur durch das Argument (den Winkel).
2. In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt für $a \in \mathbb{R}$ $(a \geq 0)$: $\sqrt[n]{a}$ ist eindeutig!
   In $\mathbb{C}$ ist die Schreibweise $\sqrt[n]{a}$ nicht mehr eindeutig!

Spezialfall:
Die n Lösungen der Gleichungen $z^n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ heissen **n-te Einheitswurzeln**.

Beispiele:

1) Wie heissen die vierten Einheitswurzeln?
   $\underline{z_0 = 1}$, $\underline{z_1 = \text{cis } 90° = i}$, $\underline{z_2 = \text{cis } 180° = -1}$, $\underline{z_3 = \text{cis } 270° = -i}$

2) Berechne sämtliche Lösungen von $z^6 = -1$.

   $a = -1 = \text{cis } 180°$, d.h. $|a| = r = 1$, $\varphi = 180°$

   $z_k = \sqrt[6]{1}\ \text{cis}\left(\frac{180°}{6} + k\frac{360°}{6}\right) = \text{cis}(30° + k \cdot 60°)$, wobei $k = 0, 1, \dots, 5$

   $\underline{z_0 = \text{cis } 30°}$, $\underline{z_1 = \text{cis } 90° = i}$, $\underline{z_2 = \text{cis } 150°}$, $\underline{z_3 = \text{cis } 210°}$, $\underline{z_4 = \text{cis } 270° = -i}$,
   $\underline{z_5 = \text{cis } 330°}$

   Je zwei Lösungen sind konjugiert komplex: $\overline{z_0} = z_5$, $\overline{z_1} = z_4$, $\overline{z_2} = z_3$
   Aufgabe: Stelle die sechs Lösungen in der Gauss-Ebene dar!

3) Bestimme die Lösungsmenge L der Gleichung $z^2 = 3 - 4i$

$a = 3 - 4i = 5 \text{ cis } 306.87°$

$z_k = \sqrt{5} \text{ cis}\left(\frac{306.87°}{2} + k\frac{360°}{2}\right) = \sqrt{5} \text{ cis}(153.435° + k \cdot 180°)$, wobei $k = 0, 1$

$z_0 = \sqrt{5} \text{ cis } 153.435° = -2 + i$, $\quad z_1 = \sqrt{5} \text{ cis } 333.435° = 2 - i$

$\underline{L = \{-2 + i, 2 - i\}}$

Die reinquadratische Gleichung $z^2 = a$ hat folglich (wegen Addition von 180°) immer zwei Lösungen z_0 und z_1, wobei $z_1 = -z_0$.

5. Gleichungen zweiten und höheren Grades

a) Die quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten

Gegeben sei die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit komplexen Koeffizienten a, b und c ($a \neq 0$).
Division mit a und quadratische Ergänzung liefert:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$, also $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} := \frac{z^2}{4a^2}$

Ist also d eine der beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = b^2 - 4ac$ (vgl. auch oben, Beispiel 3)), so gilt:

$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{d}{2a}$ bzw. $x_2 + \frac{b}{2a} = \frac{-d}{2a}$, also

$\underline{x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{d}{2a}}$ bzw. $\underline{x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{d}{2a}}$

> Zusammengefasst:
>
> Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ heissen $\underline{x_{1,2} = \frac{-b \pm d}{2a}}$, wobei d eine Lösung der Gleichung $z^2 = b^2 - 4ac$ ist.

Man beachte die Ähnlichkeit zur Lösungsformel von quadratischen Gleichungen in $\mathbb{R}$.
Hier wird allerdings die Wurzelschreibweise vermieden.

Beispiele:

1) $x^2 + (2 + 4i)x - 3 = 0$ ($a = 1$, $b = 2 + 4i$, $c = -3$)

$z^2 := (2 + 4i)^2 + 12 = 4 + 16i - 16 + 12 = 16i = 16 \text{ cis } 90°$

$\rightarrow d = 4 \text{ cis } 45° = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

$\underline{x_1} = \frac{-2 - 4i + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \underline{-1 + \sqrt{2} + i(-2 + \sqrt{2})}$

$$\underline{x_2} = \frac{-2-4i-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i}{2} = \underline{-1-\sqrt{2}+i(-2-\sqrt{2})}$$

2) $x^2 + (-13 + 10i)x + 19 - 71i = 0$

$z^2 := 169 - 260i - 100 - 76 + 284i = -7 + 24i = 25 \text{ cis } 106.26°$
$\rightarrow$ $d = 5\text{cis } 53.13° = 3 + 4i$

$$\underline{x_1} = \frac{13-10i+3+4i}{2} = \underline{8 - 3i}\ ,\quad \underline{x_2} = \frac{13-10i-3-4i}{2} = \underline{5 - 7i}$$

Bem.: TI89 liefert diese Lösungen mit csolve($x^2 + (-13 + 10i)x + 19 - 71i = 0$,x)

b) Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Satz: Ist z_1 Lösung einer Gleichung zweiten oder höheren Grades mit reellen Koeffizienten, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ Lösung dieser Gleichung.

Beweis:
Eine Gleichung n-ten Grades habe die Form
$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ (i = 0,1,2,..n)
Da z_1 Lösung dieser Gleichung, so gilt:
$a_n \cdot z_1^n + a_{n-1} \cdot z_1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z_1 + a_0 = 0.$
Bildet man links und rechts des Gleichheitszeichens die konjugiert komplexe Zahl, so gilt (Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl: s. p. 3)

$\overline{a_n} \cdot \overline{z_1^{\,n}} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z_1^{\,n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \cdot \overline{z_1} = \overline{0}$. Da $a \in \mathbb{R} \rightarrow \overline{a} \in \mathbb{R}$, so folgt:

$a_n \cdot \overline{z_1^{\,n}} + a_{n-1} \cdot \overline{z_1^{\,n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \overline{z_1} = 0$. Wendet man wieder die Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl an, so gilt:

$a_n \cdot \overline{z_1}^{\,n} + a_{n-1} \cdot \overline{z_1}^{\,n-1} + \ldots + a_1 \cdot \overline{z_1} = 0$. Also folgt die Behauptung.

Aufgabe:
Die Gleichung $z^4 - 12z^3 + az^2 + bz + 72 = 0$ hat zwei rein imaginäre Lösungen sowie eine reelle Doppellösung. Bestimme a, b. (a, b $\in \mathbb{R}$)

Lösung:
$z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$, $z_3 = \alpha\, i$ ($\alpha > 0$). Nach dem Satz gilt dann $z_4 = \overline{\alpha i} = -\alpha\, i$. Es ist also
$(z - z_1)^2 (z - \alpha\, i)(z + \alpha\, i) \equiv z^4 - 12z^3 + az^2 + bz + 72$ (für alle z)
$(z^2 - 2z_1z + z_1^2)(z^2 + \alpha^2) = z^4 + z^3(-2z_1) + z^2(\alpha^2 + z_1^2) + z(-2z_1\alpha^2) + \alpha^2 z_1^2$
Der Koeffizientenvergleich (reelle Koeffizienten) liefert:
$12 = 2z_1$, also $z_1 = 6$; $\alpha^2 z_1^2 = 72$, also $\alpha^2 = 2$; $\underline{a} = \alpha^2 + z_1^2 = \underline{36}$; $\underline{b} = -2z_1\alpha^2 = \underline{-24}$

c) Fundamentalsatz der Algebra

Fundamentalsatz der Algebra

In $\mathbb{C}$ lässt sich jedes Polynom n-ten Grades (mit komplexen Koeffizienten a_i) in Linearfaktoren zerlegen:

$P_n(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$, d.h.

jede Gleichung n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen (mehrfache Lösungen werden dabei mehrfach gezählt).

Diesen Fundamentalsatz hat C.F.Gauss 1797 in seiner Dissertation bewiesen. Hier wird auf den Beweis verzichtet.

Man beachte den Gegensatz zu $\mathbb{R}$, wo sich nicht jedes Polynom zweiten Grades in Linearfaktoren zerlegen lässt.

Aufgaben:

1a) Wie gross ist das **Produkt** aller fünften Einheitswurzeln?

Die Lösungen der Gleichung $z^5=1$ seien $z_1, z_2, \ldots, z_5$.
Da $z^5 - 1 = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_5)$, so muss
$- z_1 \cdot z_2 \cdot \cdot \cdot z_4 \cdot z_5 = -1$, also das <u>Produkt dieser Einheitswurzeln = 1</u> sein.

b) Die Verallgemeinerung auf die Lösungen der Gleichung $z^n = a$ $(a \in \mathbb{C})$ erfolgt sinngemäss und lautet:

Ist n ungerade, so ist das Produkt aller Lösungen = a
Ist n gerade, so ist das Produkt aller Lösungen = -a.

2a) Wie gross ist die **Summe** aller fünften Einheitswurzeln?

Da $z^5 - 0 \cdot z - 1 = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_5) = z^5 - (z_1+z_2+z_3+z_4+z_5)z + \ldots - \ldots$,

so muss $\underline{\sum_{i=1}^{5} z_i = 0}$ sein.

b) Die Verallgemeinerung auf die Lösungen der Gleichung $z^n = a$ $(a \in \mathbb{C})$ erfolgt sinngemäss und lautet:

Falls $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die n Lösungen der Gleichung $z^n = a$ sind, so gilt: $\underline{\sum_{i=1}^{n} z_i = 0}$.