

4. Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

a) Homogene Differentialgleichungen

$$y'' + 2a y' + b y = 0 \quad (**)$$

Ansatz: $y = e^{\mu x}$, also $y' = \mu e^{\mu x}$ und $y'' = \mu^2 e^{\mu x}$

eingesetzt in (**): $\mu^2 e^{\mu x} + 2a\mu e^{\mu x} + b e^{\mu x} = 0$

Dies ergibt die charakteristische Gleichung $\mu^2 + 2a\mu + b = 0$

Ihre Lösungen lauten: $\mu_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}$ und $\mu_2 = -a - \sqrt{a^2 - b}$

1. Fall: $\lambda^2 := a^2 - b > 0$ ($\lambda > 0$)

Die zwei grundsätzlichen Lösungen (sog. Hauptsystem) von (**) haben also die

Form: $y_1 = e^{\mu_1 x} = e^{(-a+\lambda)x}$ und $y_2 = e^{\mu_2 x} = e^{(-a-\lambda)x}$

Die Lösungsgesamtheit von (**) ist daher $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{-ax} (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x})$

Beispiel 1: $a = 3$, $b = 5$, also $y'' + 6y' + 5y = 0$ (**)

Es ist daher $\lambda^2 = 9 - 5$, also $\lambda = 2$

Die Lösungsgesamtheit von (**) lautet damit

$$y = e^{-3x} (C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$

Kontrolle mit TI Voyage: `deSolve(y'' + 6y' + 5y = 0, x, y)` liefert

$$y = \rho_1 e^{-x} + \rho_2 e^{-5x}$$

2. Fall: $\lambda^2 = a^2 - b = 0$ ($\lambda = 0$, $a^2 = b$)

Dann wird $\mu_1 = \mu_2 = -a$ (Doppellösung)

Das Hauptsystem (die zwei grundsätzlichen Lösungen) heissen dann

$y_1 = e^{\mu_1 x} = e^{-ax}$ (klar!) und $y_2 = x e^{-ax}$ (Beweis: Aufgabenblatt, Aufgabe 2)

Die Lösungsgesamtheit von (**) ist also in diesem Fall

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{-ax} (C_1 + C_2 x)$$

Beispiel 2: $a = 2$, $b = 4$, also $y'' + 4y' + 4y = 0$ (**)

Es ist daher $\lambda^2 = 4 - 4$, also $\lambda = 0$

Die Lösungsgesamtheit von (**) lautet damit

$$y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x) \quad (\text{Kontrolle mit TI selber})$$

3. Fall: $a^2 - b < 0$ $\omega^2 := b - a^2$ ($\omega > 0$)

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\boxed{\mu^2 + 2a\mu + b = 0}$ sind dann komplex:

$$\mu_1 = -a + i\sqrt{b-a^2} = -a + i\omega \text{ und } \mu_2 = -a - i\sqrt{b-a^2} = -a - i\omega$$

Es entsteht also ein komplexes Hauptsystem

$$y_1 = e^{\mu_1 x} = e^{(-a+i\omega)x} \text{ und } y_2 = e^{\mu_2 x} = e^{(-a-i\omega)x}$$

Wir benötigen aber ein reelles Hauptsystem. Gemäss früher (siehe Skript über komplexe Zahlen) gilt: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Realteil $\text{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi$, Imaginärteil $\text{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi$

Man kann zeigen (durch Einsetzen: s. Aufgabenblatt, Aufgabe 3a):

$\text{Re}(y_1)$ und $\text{Im}(y_1)$ bilden ein reelles Hauptsystem, also

$$\begin{aligned} \text{Re}(y_1) &= \text{Re}(e^{(-a+i\omega)x}) = \text{Re}(e^{-ax} \cdot e^{i\omega x}) = \text{Re}(e^{-ax}) \cdot \text{Re}(e^{i\omega x}) = e^{-ax} \cos \omega x \\ \text{Im}(y_1) &= \dots = e^{-ax} \sin \omega x \end{aligned}$$

Die Lösungsgesamtheit von (**) ist also in diesem Fall

$$y = C_1 e^{-ax} \cos \omega x + C_2 e^{-ax} \sin \omega x = e^{-ax} (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)$$

Bemerkung: Die zweite Lösung $y_2 = e^{\mu_2 x} = e^{(-a-i\omega)x}$ führt zu keiner neuen Lösung (s. Aufgabenblatt, Aufgabe 3b)

Beispiel 3: $a = 1, b = 5$, also **$y'' + 2y' + 5y = 0$ (**)**

Es ist $a^2 - b = -4$, also $\omega = 2$

Die Lösungsgesamtheit von (**) lautet damit

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \quad (\text{Kontrolle mit TI selber})$$

Zusatz: Wie heisst die Lösung von (**) mit den beiden Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$?

Aus $y(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$. Also ist $y = C_2 e^{-x} \sin 2x$.

Damit $y' = C_2 (-e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x)$.

Aus $y'(0) = 1$ gilt $C_2 (0 + 2) = 1$, daher $C_2 = 0.5$.

Die Lösung heisst also **$y = 0.5 e^{-x} \sin 2x$**

Kontrolle mit TI:

deSolve($y'' + 2y' + 5y = 0$ and $y(0)=0$ and $y'(0)=1,x,y$)

Beispiel 4: $a = 0, b = k^2$ mit $k > 0$, also **$y'' + k^2 y = 0$ (**)**

Es ist $a^2 - b = -k^2$, also $\omega = k$

Die Lösungsgesamtheit von (**) lautet damit

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad (\text{Kontrolle mit TI selber})$$

b) Inhomogene Differentialgleichungen

Inhomogene DGL: $y'' + 2a y' + b y = g(x)$ (*), $y = f(x) = ?$

Dazugehörige homogene DGL: $y'' + 2a y' + b y = 0$ (**)

Die Funktion $g(x)$ nennt man Störfunktion.

Es gilt der analoge Satz wie bei Differentialgleichungen 1. Ordnung (s. früher):

Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL (*) erhält man, indem man zur Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL (**) **eine** beliebige Lösung y_0 (partikuläre Lösung) addiert.

Für das Finden einer partikulären Lösung versucht man zuerst Ansätze wie bei den Differentialgleichungen 1. Ordnung:

- Ist $g(x)$ eine ganzrationale Funktion n-ten Grades, so verwendet man als Ansatz eine ganzrationale Funktion n-ten oder (n+1)-sten Grades
- Ist $g(x)$ eine Exponentialfunktion, so versucht man als Ansatz für y_0 wiederum eine Exponentialfunktion.
- Ist $g(x)$ eine trigonometrische Funktion, so nimmt man als Ansatz $y_0 = A \sin \omega x + B \cos \omega x$ (vgl. auch Aufgabenblatt, Aufgabe 4)

Beispiele:

1a) $y'' + y' - 2y = e^{2x}$ (*)

Die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL $y'' + y' - 2y = 0$ lautet ($a^2 - b = 0.25 + 2 > 0$, also Fall1):

$$y = e^{-0.5x} (C_1 e^{1.5x} + C_2 e^{-1.5x}) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad y = e^{2x} \text{ ist nicht Lösung von (**)}$$

Ansatz für y_0 : $y_0 = k e^{2x}$, also $y_0' = 2k e^{2x}$, $y_0'' = 4k e^{2x}$
 $4k + 2k - 2k = 1$, also $k = 0.25$

Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL $y'' + y' - 2y = e^{2x}$ lautet daher $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 0.25 e^{2x}$

1b) $y'' + y' - 2y = e^x$ (*)

Die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL $y'' + y' - 2y = 0$ lautet wie bei 1a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y = e^x$ ist also hier Lösung von (**)

Der Ansatz $y_0 = k e^x$ führt daher auf $k + k - 2k = 1$, also $0 = 1$ (!)

Neuer Ansatz für y_0 : $y_0 = k x e^x$, also $y_0' = \dots$, $y_0'' = \dots$
 \dots , also $k = \frac{1}{3}$ (selber)

Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL $y'' + y' - 2y = e^x$ lautet daher $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} x e^x$

- 2a) $y'' - y = \sin 3x$ (*) (a = 0, b = -1)
 Die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL $y'' - y = 0$
 lautet $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (Fall1: $\lambda^2 = a^2 - b = 1 > 0$)

Ansatz für y_0 : $y_0 = \alpha \sin(3x + \gamma) = \alpha_1 \sin 3x + \alpha_2 \cos 3x$
 $y_0' = 3\alpha_1 \cos 3x - 3\alpha_2 \sin 3x$
 $y_0'' = -9\alpha_1 \sin 3x - 9\alpha_2 \cos 3x$

eingesetzt in (*): $-9\alpha_1 \sin 3x - 9\alpha_2 \cos 3x - \alpha_1 \sin 3x - \alpha_2 \cos 3x = \sin 3x \quad (\forall x)$
 $-10\alpha_1 \sin 3x = \sin 3x \rightarrow \alpha_1 = -0.1$
 $-10\alpha_2 \cos 3x = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$

Also ist $y_0 = -0.1 \sin 3x$

Die Lösungsgesamtheit von (*) ist daher $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 0.1 \sin 3x$

- 2b) $y'' + 9y = \sin 3x$ (*) (a = 0, b = 9)
 Die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL $y'' + 9y = 0$
 lautet $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ (Fall3: $a^2 - b = -9 < 0$)

Da $y = \sin 3x$ bereits Lösung der homogenen DGL ist, so kann man nicht den Ansatz wie bei 2a) machen, sondern man versucht

$y_0 = \alpha_1 x \sin 3x + \alpha_2 x \cos 3x$
 (selber!)
 Es folgt $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = \frac{1}{6}$

Die Lösungsgesamtheit von (*) ist $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x$

- 2c) $y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = A \cos \omega_1 t$ (*) (y Funktion von t; $\delta, \omega_0, A \geq 0$)

Die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL

$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0$ sei die Funktion mit Gleichung $y = h(t)$

je nachdem $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$, also $\omega_0 < \delta$ (Fall1)

$\delta^2 - \omega_0^2 = 0$, also $\omega_0 = \delta$ (Fall2)

$\delta^2 - \omega_0^2 < 0$, also $\omega_0 > \delta$ (Fall3)

Ansatz für y_0 : $y_0 = \alpha \cos(\omega_1 t + \gamma)$ (bzw. $y_0 = \alpha_1 \cos \omega_1 t + \alpha_2 \sin \omega_1 t$)
 $\alpha = ? \quad \gamma = ?$

$y_0' = -\alpha \omega_1 \sin(\omega_1 t + \gamma), \quad y_0'' = -\alpha \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \gamma)$

eingesetzt in (*):

$-\alpha \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \gamma) - 2\delta \alpha \omega_1 \sin(\omega_1 t + \gamma) + \omega_0^2 \alpha \cos(\omega_1 t + \gamma) = A \cos \omega_1 t$

Goniometrie bzw TI Voyage....

Vergleich der Koeffizienten von $\sin \omega_1 t$ und $\cos \omega_1 t$ liefert ein 2-2-Gleichungssystem für die zwei Unbekannten α und γ .
 (Aufgabenblatt, Aufgabe 5)

Lösung:

$$-\alpha \omega_1^2 \cos \omega_1 t \cos \gamma + \alpha \omega_1^2 \sin \omega_1 t \sin \gamma - 2\delta \alpha \omega_1 \sin \omega_1 t \cos \gamma - 2\delta \alpha \omega_1 \cos \omega_1 t \sin \gamma + \omega_0^2 \alpha \cos \omega_1 t \cos \gamma - \omega_0^2 \alpha \sin \omega_1 t \sin \gamma = A \cos \omega_1 t$$

$$\cos \omega_1 t (-\alpha \omega_1^2 \cos \gamma - 2\delta \alpha \omega_1 \sin \gamma + \omega_0^2 \alpha \cos \gamma) + \sin \omega_1 t (\alpha \omega_1^2 \sin \gamma - 2\delta \alpha \omega_1 \cos \gamma - \omega_0^2 \alpha \sin \gamma) = A \cos \omega_1 t + 0 \cdot \sin \omega_1 t$$

$$\alpha(-\omega_1^2 \cos \gamma - 2\delta \omega_1 \sin \gamma + \omega_0^2 \cos \gamma) = A \quad (1) \quad (\text{auch mit Setting } t:=0)$$

$$\omega_1^2 \sin \gamma - 2\delta \omega_1 \cos \gamma - \omega_0^2 \sin \gamma = 0 \quad (2) \quad (\text{auch mit Setting } t:=\pi/(2\omega_1))$$

$$\text{Aus (2) folgt } \tan \gamma = \frac{2\delta \omega_1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \quad (3) \quad \omega_1 \neq \omega_0$$

(3) eingesetzt in (1) ergibt nach einiger Rechnung

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \omega_1^2}}$$

Also erhält man die partikuläre Lösung $y_0 = \alpha \cos(\omega_1 t + \gamma)$ und hat damit die Lösungsgesamtheit $y = h(t) + \alpha \cos(\omega_1 t + \gamma)$.

Ist also $\omega_0 > \delta$ (Fall3), so gilt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}^{-\delta t} (\mathbf{C}_1 \cos \omega t + \mathbf{C}_2 \sin \omega t) + \alpha \cos(\omega_1 t + \gamma). \quad (\text{mit } \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2)$$

2d) Ist nun z.B. aber $\omega_1 = \omega_0$ und $\delta = 0$, so heisst die Differentialgleichung von 2c) $\mathbf{y}'' + \omega_0^2 \mathbf{y} = \mathbf{A} \cos \omega_0 t$. Wie lautet dann ihre Lösung?

(als Aufgabe!)

Hinweis: $y = A \cos \omega_0 t$ ist bereits Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung $\mathbf{y}'' + \omega_0^2 \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Wie muss dann der Ansatz für y_0 heissen? (vgl. frühere Aufgabe 2b))

$$\text{Lösung: } y = \frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t + h(t)$$

(Dabei ist $h(t)$ Lösungsgesamtheit von der homogenen DGL)

5. Numerische Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Die Verfahren zur Lösung einer DGL 1. Ordnung (nach Euler, Heun und Runge-Kutta) wurden im Skript Differentialgleichungen.pdf (s. www.mathematik.ch) ausführlich behandelt.

Hier wird nur das Verfahren zur Reduktion der Ordnung und das anschliessende Lösen des dazugehörigen Differentialgleichungssystems nach Runge-Kutta mit Hilfe des TI Voyage 200 erklärt.

Die (inhomogene) DGL $y'' + 2a y' + b y = g(x)$ (*) kann auf ein Gleichungssystem von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den zwei gesuchten Funktionen y_1 und y_2 geführt werden:

$y_1 := y$. Dann ist $y_1' = y'$ und $y_1'' = y''$.
Definiert man $y_2 := y_1'$, so ist $y_2' = y_1'' = y''$.

Dann gilt mit (*) $y_2' = -2a y_1' - b y_1 + g(x)$

(*) ist also äquivalent zum Gleichungssystem:

$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= -2a y_2 - b y_1 + g(x)\end{aligned}$
--

Kennt man die zwei Anfangsbedingungen $y(0) = y_1(0) := y_0$ und $y'(0) = y_2(0) := y_0'$, so kann durch geeignete Modifikation des Verfahrens von Runge-Kutta für die Lösung einer DGL 1. Ordnung die numerische Lösung von (*) gefunden werden.

Beispiel zur Lösung mit dem TI Voyage 200:

(vergleiche mit den früheren exakten Lösungen dieser Beispiele)

$$y'' - y = \sin 3x \quad (*) \quad (\text{s. frühere Aufgabe 2a), p.4)$$

Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$.

Das oben angegebene Verfahren führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_1 + \sin 3x, \text{ Anfangsbedingungen } y_1(0) = y_2(0) = 0.\end{aligned}$$

Numerische Lösung mit dem TI Voyage 200

1. MODE: Einstellung für *Graph* auf *DIFF EQUATIONS*
2. Im Y-Editor das Gleichungssystem eingeben:
$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_1 + \sin(3*t) \quad (\text{y}_1 \text{ und } y_2 \text{ sind Funktionen von } t)$$
mit den Anfangsbedingungen $y_{i1} = 0$ und $y_{i2} = 0$ für $t_0 = 0$.
3. Im Y-Editor mit $\diamond F$ die *GRAPH FORMATS* - Seite aufrufen:
Coordinates = RECT
Grid = OFF
Axes = ON
Labels = OFF
Solution Method = RK (Runge-Kutta)
Fields = **FLDOFF**
(vgl. früher Richtungsfeld einer DGL: Einstellung SLPFLD)

4. Im Y-Editor die AXES - Einstellungen aufrufen:
Axes TIME
5. Im Window-Editor die Fenstervariablen einstellen bzw. anpassen:
t0 = 0. xmin = 0. ncurves = 0.
tmax = 6. xmax = 6. difftol = .001
tstep = .1 xscl = 1.
tplot = 0.
ymin = 0. ymax = 10. yscl = 1.
6. Grafikbildschirm aufrufen

Mit TABLE können die Werte von y1 und y2 abgefragt werden:
z.B. y1(3) = y(3) = 2.9618.

{zum Vergleich: Die exakte Lösungsgesamtheit (s. früher)
y = C₁e^x + C₂e^{-x} - 0.1 sin3x liefert mit den genannten Anfangsbedingungen die Lösung **y = 0.15e^x - 0.15e^{-x} - 0.1 sin3x**, also z.B. für x=3 den Wert y=2.9642;
beachte: der TI liefert y = 0.3sinhx - 0.1sin3x, was dasselbe ist!}

Anwendungen: 1. Das mathematische Pendel

Nach einer früheren Aufgabe erhält man für das mathematische Pendel der Länge l die Differentialgleichung $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ (*) (g= 9.81m/s²)

Für kleine Winkel φ gilt $\varphi \approx \sin \varphi$. Vergleiche früher: Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ für x→0 ist 1.

Mit dieser Setzung wurde die DGL (*) zur Gleichung $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$

Ihre Lösung lautete: $\varphi(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t)$

Die Koeffizienten C₁ und C₂ sind abhängig von den Anfangsbedingungen, d.h. z.B. vom Wert $\varphi(0)$ (Ort) und vom Wert $\dot{\varphi}(0)$ (Geschwindigkeit) zur Zeit t = 0.

Die Schwingungsdauer T ist nur abhängig von l und beträgt $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Die Lösung der ursprünglichen DGL (*) kann nicht exakt angegeben werden. Die numerische Lösung erhält man mit dem oben angegebenen Verfahren durch Überführung in ein Gleichungssystem von zwei DGL's 1. Ordnung.

Aufgabe 1

Suche die Lösungen $\varphi(t)$ für die Gleichung des Pendels bei kleinem Winkel ,exakt', wenn l = 1 m und

a) der maximale Ausschlag des Pendels 25° ≈ 0.43633 rad beträgt.

b) $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(0) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{s}$ ist.

Aufgabe 2

Löse die Differentialgleichung des Pendels für l = 1 m, wenn die Masse unter einem Winkel von a) 90° bzw. b) 170° ($\varphi(0) \approx 2.967$) losgelassen wird ($\varphi'(0)=0$) numerisch mit Hilfe des TI Voyage und stelle die Graphen der Funktionen $\varphi(t)$ dar.

Vergleiche mit der falschen Lösung bei Verwendung der Approximation $\varphi \approx \sin \varphi$.

Lösung Aufgabe 1

1a) Die ‚exakte‘ Lösung der DGL (mit $\varphi \approx \sin \varphi$) liefert für die Anfangswinkel 25° die Funktion $\varphi(t) = 0.43633 \cos(\sqrt{g} t)$, die Schwingungsdauer T beträgt etwa 2.006 s.

1b) $\varphi(t) = \frac{\pi}{4\sqrt{g}} \sin(\sqrt{g} t) \approx 0.2508 \sin(\sqrt{g} t)$, gleiche Schwingungsdauer $T \approx 2.006$ s

Zum Vergleich kann Aufgabe 1 auch numerisch mit dem TI gelöst werden.

Lösung Aufgabe 2

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0.$$

Man erhält ein System mit zwei Differentialgleichungen 1.Ordnung:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -g/l \sin y_1 \end{aligned}$$

1. MODE: Einstellung für *Graph* auf *DIFF EQUATIONS*

2. Im Y-Editor das Gleichungssystem eingeben:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -9.81 \cdot \sin(y_1) \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen a) $y_{i1} = 1.5708$ bzw. b) $y_{i1} = 2.967$, $t_0 = 0$. und $y_{i2} = 0$
Weiter wie früher beschrieben...

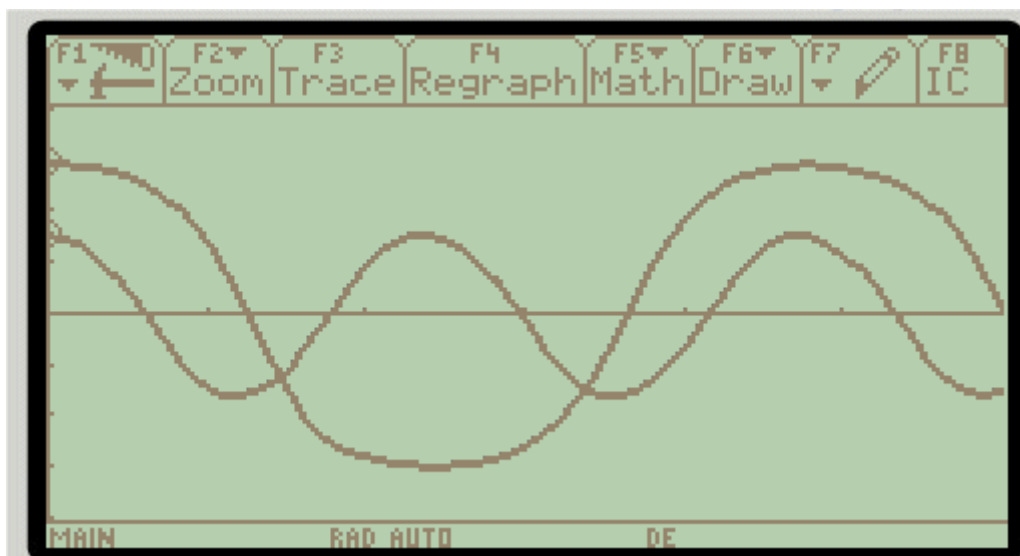
5. Im Window-Editor die Fenstervariablen anpassen, z.B.

$$\begin{aligned} t_0 &= 0. & x_{\min} &= 0. & n_{\text{curves}} &= 0. \\ t_{\max} &= 6. & x_{\max} &= 6. & \text{diftol} &= .001 \\ t_{\text{step}} &= .1 & x_{\text{scl}} &= 1. \\ t_{\text{plot}} &= 0. \\ y_{\min} &= -4. & y_{\max} &= 4. & y_{\text{scl}} &= 1. \end{aligned}$$

Es sind die beiden Graphen für $\varphi(t)$ für Auslenkung 90° bzw. 170° gezeichnet.

(y_3 und y_4 benützen; nur y_1 und y_3 aktivieren)

Die graphische Darstellung ergibt für den Anfangswinkel 170° eine Kurve, die sich klar von einer Cosinuskurve unterscheidet. Die Schwingungsdauer beträgt für den Anfangswinkel 90° etwa $T \approx 2.35$ s, für den Anfangswinkel 170° bereits $T \approx 4.85$ s. (Mit Trace kann die Berechnung schrittweise verfolgt werden).



2. Das gedämpfte mathematische Pendel

Man kann leicht zeigen, dass sich die Funktion $\varphi(t)$ bei einem gedämpften mathematischen Pendel (Länge l , Masse m) mit Dämpfungskoeffizient k durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (*) \quad \text{beschreiben lässt. (selber!)}$$

Setzt man wiederum (für kleine Winkel) $\varphi \approx \sin \varphi$, so entsteht die exakt lösbare DGL

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad \text{mit Lösungen je nach Fall gemäss Kapitel 4a).}$$

Die Lösung der DGL (*) ist natürlich auch hier nur numerisch möglich.

Aufgabe 1

Suche die Lösungen $\varphi(t)$ für die Gleichung des gedämpften Pendels bei kleinem Winkel ‚exakt‘, wenn $l = 1$ m, $m = 1$ kg, der maximale Ausschlag des Pendels $25^\circ \approx 0.43633$ rad beträgt, $\dot{\varphi}(0)=0$ und

a) $k = 1$ kg/s b) $k = 2\sqrt{g}$ kg/s ist. ($g = 9.81$)

Aufgabe 2

Löse die Differentialgleichung des Pendels für $l = 1$ m, $m = 1$ kg, wenn die Masse m unter einem Winkel von 170° ($\varphi(0) \approx 2.967$) losgelassen wird ($\dot{\varphi}(0)=0$) und

a) $k = 1$ kg/s b) $k = 2\sqrt{g}$ kg/s ≈ 6.26 kg/s ($g = 9.81$)

numerisch mit Hilfe des TI Voyage und stelle die Graphen der Funktionen $\varphi(t)$ dar.

Lösung Aufgabe 1

a) DGL $\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + g \varphi = 0$. ($a = 0.5$, $b = g$). Da $a^2 - b = 0.25 - 9.81 < 0$, so Fall 3.

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet die Lösung

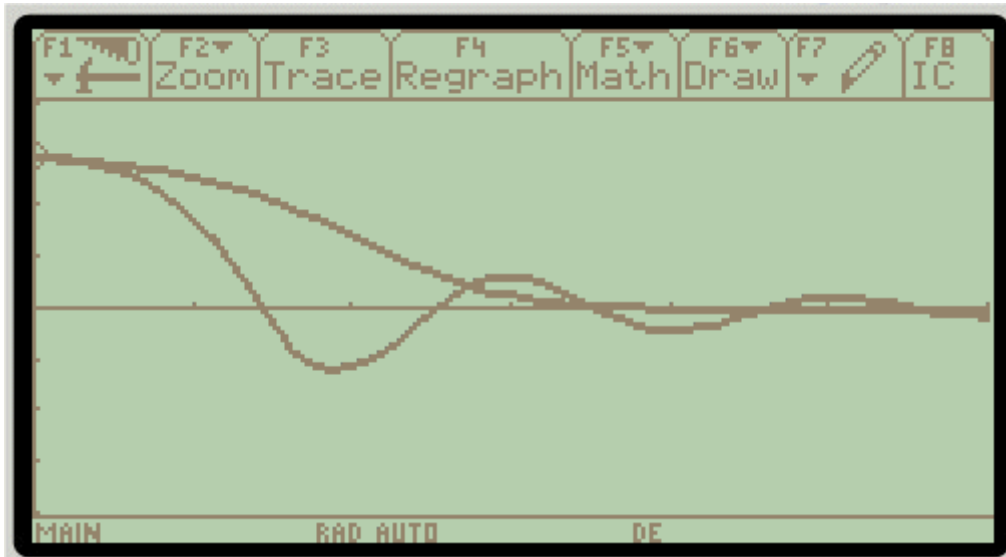
$\varphi(t) = 0.43633e^{-0.5t} (\cos \omega t + 1/2\omega \sin \omega t)$ mit $\omega^2 = b - a^2 = g - 0.25$, $\omega \approx 3.0919$
(vergleiche mit der exakten Lösung des TI)

b) DGL $\ddot{\varphi} + 2\sqrt{g} \dot{\varphi} + g \varphi = 0$. ($a = \sqrt{g}$, $b = g$). Da $a^2 - b = 0$, so entsteht Fall 2.

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet die Lösung

$\varphi(t) = 0.43633e^{-at} (1 + \sqrt{g} t) = 0.43633e^{-3.132t} (1 + 3.132 t)$

Lösung Aufgabe 2



3. Das Doppelpendel

In einem Skript (<http://www.physik.uni-oldenburg.de/fttheorie/polley/VL/KM080205.pdf>, p.37) findet man folgende Angaben zum Doppelpendel:

Doppelpendel

Kartesische Koordinaten der Pendelmassen:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 & x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ y_1 &= -l_1 \cos \varphi_1 & y_2 &= -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

Potentielle Energie:

$$U = -m_1gl_1\cos \varphi_1 - m_2g(l_1\cos \varphi_1 + l_2\cos \varphi_2)$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\frac{l_1}{l_2}\ddot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\frac{g}{l_2} \sin \varphi_1 &= 0 \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 + g \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung. Durch Reduktion auf Differentialgleichungen 1. Ordnung erhält man ein Gleichungssystem von 4 Gleichungen:

Setzt man $y_1 = \varphi_1$, $y_2 = \varphi_1'$, $y_3 = \varphi_2$ und $y_4 = \varphi_2'$, so gilt:

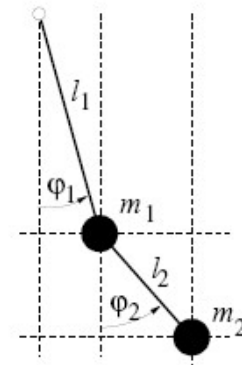
- 1) $y_1' = y_2$
- 2) $(\frac{m_1}{m_2} + 1)l_1/l_2 * y_2' + \cos(y_1 - y_3) * y_4' + \sin(y_1 - y_3) * (y_4)^2 + (\frac{m_1}{m_2} + 1)g/l_2 * \sin(y_1) = 0$
- 3) $y_3' = y_4$
- 4) $l_2 * y_4' + l_1 * \cos(y_1 - y_3) * y_2' - l_1 * \sin(y_1 - y_3) * (y_2)^2 + g * \sin(y_3) = 0$

Wenn man 2) und 4) als Gleichungssystem für y_2' und y_4' betrachtet, so kann man nach diesen zwei Unbekannten y_2' und y_4' auflösen.

Man erhält also ein System der Form

- 1) $y_1' = y_2$
- 2) $y_2' = \dots$ // Funktion von y_1, y_2, y_3 und y_4
- 3) $y_3' = y_4$
- 4) $y_4' = \dots$ // Funktion von y_1, y_2, y_3 und y_4

Mit gewählten Anfangsbedingungen kann das System vom TI Voyage gelöst werden.

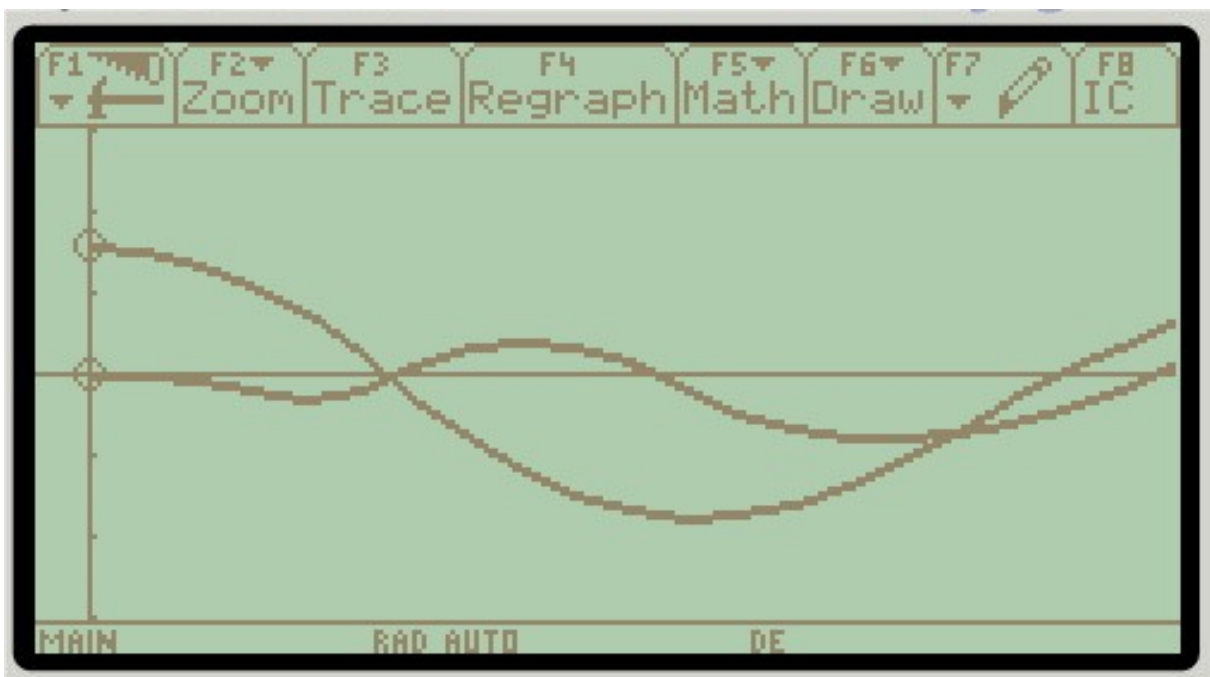


Aufgabe: Setze $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2 = 1$ Meter, bestimme dann y_2' und y_4' als Funktionen von y_1, y_2, y_3 und y_4 .

Experimentiere mit verschiedenen Anfangsbedingungen (z.B. $y_1(0)=\pi/2, y_3(0)=0, y_2(0)=y_4(0)=0$) und stelle mit Hilfe des TI Voyage die Funktionen y_1 und y_3 graphisch dar.

Vergleiche das Bild des TI mit demjenigen, das durch Anwendung des Applets auf <http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/Doppelpendel/> entsteht!

Lösung für $y_1(0)=\pi/2, y_3(0)=0, y_2(0)=y_4(0)=0$, d.h. $\varphi_1(0)=\pi/2, \varphi_2(0)=0, \varphi_1'(0)=0$ und $\varphi_2'(0)=0$



3. Gekoppelte Pendel

Im Physikteil wurde das Differentialgleichungssystem für gekoppelte Pendel gleicher Länge $l_1=l_2=l$ und mit gleicher Masse $m_1=m_2=m$ bei kleinen Ausschlägen hergeleitet:

$x_1(t)$: Ausschlag 1. Pendel, $x_2(t)$: Ausschlag 2. Pendel, D : Federkonstante

$$(1) \quad \ddot{x}_1 + \frac{g}{l} x_1 = -\frac{D}{m} (x_1 - x_2)$$

$$(2) \quad \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} x_2 = -\frac{D}{m} (x_2 - x_1)$$

Die Lösung dieses Systems war für den Fall 1: $x_1(0) = x_2(0) > 0$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$:

$$x_1(t) = A \cos \omega_s t = x_2(t) \quad \text{mit} \quad \omega_s = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Die Lösung dieses Systems war für den Fall 2: $x_1(0) = -x_2(0) > 0$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$:

$$x_1(t) = B \cos \omega_a t = -x_2(t) \quad \text{mit} \quad \omega_a \text{ gemäss Aufgabe 1}$$

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist daher

$$x_1(t) = A \cos \omega_s t + B \cos \omega_a t \quad \text{und} \quad x_2(t) = A \cos \omega_s t - B \cos \omega_a t$$

Für die Schwebefrequenz f' gilt $f' = \frac{1}{2\pi} |\omega_a - \omega_s|$, T' ist $1/f'$

Aufgaben

- 1) Zeige, dass $\omega_a = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$
- 2) Bestimme die Konstanten A und B für die Anfangsbedingungen $x_1(0)$, $x_2(0)$ und $v_1(0) = v_2(0) = 0$
- 3) Es sei nun $l = 1\text{m}$, $m = 1\text{kg}$ und $D = 1\text{ kgs}^{-2}$
Berechne zuerst ω_s , ω_a , f' und T' .

Löse nun das Differentialgleichungssystem (1) (2) mit Hilfe des TI Voyage:

Dabei sei $x_1(0) = 3^\circ$, $x_2(0) = 0$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$.

{Hinweis: $y1 = x_1$, $y2 = x_1'$, $y3 = x_2$, $y4 = x_2'$,}

Stelle die beiden Graphen x_1 und x_2 in einem geeigneten Koordinatensystem dar, so dass mit dem theoretischen Wert von T' verglichen werden kann.

Lösungen:

- 1) Einsetzen von $x_1(t) = B \cos \omega_a t$ und $x_2(t) = -B \cos \omega_a t$ in die Differentialgleichung (1) und Auflösen nach ω_a .
- 2) $A = 0.5(x_1(0) + x_2(0))$, $B = 0.5(x_1(0) - x_2(0))$
- 3) $\omega_s = 3.132 \text{ s}^{-1}$, $\omega_a = 3.4366 \text{ s}^{-1}$, $f = 0.04845 \text{ s}^{-1}$ und $T = 20.6 \text{ s}$.

Lösung mit TI:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -9.81y_1 - (y_1 - y_3), \quad y_3' = y_4, \quad y_4' = -9.81y_3 - (y_3 - y_1)$$

$$y_{i1} = \pi/60., \text{ sonst alle } y_{i...} = 0$$

In WINDOW $t_0=0$, $t_{\max}=21$, $x_{\min}=-0.1$, $x_{\max}=21$, $y_{\min}=-0.05$, $y_{\max}=0.05$

