

Komplexe Zahlen

1. Bedarfsfrage

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ([Peano-Axiome](#))

Aber: $a + x = b$ ist nur lösbar, falls $b > a$

1. Erweiterung: Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$a + x = b$ ist lösbar in \mathbb{Z} , nämlich $x = b + (-a) = b - a$

Aber: $a \cdot x = b$ nur lösbar, falls a ein Teiler von b ist.

2. Erweiterung: Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$a \cdot x = b$ lösbar in \mathbb{Q} , nämlich $x = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$

Aber: $x^2 = c$ nur lösbar, falls $c = \frac{p^2}{q^2}$

3. Erweiterung: \mathbb{R} : Menge der reellen Zahlen (mit Hilfe von Intervallschachtelungen)

Aber: $x^2 = c$ nur lösbar, falls $c \geq 0$

4. Erweiterung: \mathbb{C} : Menge der komplexen Zahlen

$x^2 = c$ lösbar in \mathbb{C} , nämlich ??

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Also soll auch gelten: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Die Menge \mathbb{C}

Definition: $\mathbb{C} = \{z \mid z = (x,y), x, y \in \mathbb{R}\}$, d.h. \mathbb{C} ist die Menge aller geordneten Paare von reellen Zahlen.

x : Realteil von z : $x = \operatorname{Re}(z)$

y : Imaginärteil von z : $y = \operatorname{Im}(z)$ (Beachte also: $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$)

$(1,0) := 1$ reelle Einheit

$(0,1) := i$ imaginäre Einheit

Man kann (mit Hilfe der Definition von $+$ und \cdot in \mathbb{C} , s. später) zeigen:

z kann in der Form $z = x + i y$ geschrieben werden (sog. Normalform oder kartesische Form)

Beispiele: $z = (0,1) = 0 + 1i = i$

$\operatorname{Re}(-4 + 5i) = -4$, $\operatorname{Im}(-4 + 5i) = 5$, $\operatorname{Re}(i) = 0$, $\operatorname{Im}(i) = 1$

3. Das Rechnen mit den komplexen Zahlen

Seien nun $z_1 = x_1 + i y_1$ und $z_2 = x_2 + i y_2$ zwei komplexe Zahlen

Definition der Addition: $z_1 + z_2 = x_1 + i y_1 + x_2 + i y_2 := x_1 + x_2 + i (y_1 + y_2)$
Man addiert also Realteil und Imaginärteil

Definition der Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) := x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Definition der Gleichheit: $z_1 = z_2$, falls $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$
(Realteile und Imaginärteile müssen gleich gross sein)

Beispiele: (s. auch [Applet](#) auf www.mathematik.ch)

1) $(3 + 4i) + (-1 + 1i) = \underline{2 + 5i}$

2) $(3 + 4i) \cdot (-1 + 1i) = \underline{-7 - i}$

3) $(0 + i) \cdot (0 + i) := i^2 = \underline{-1}$

4) $(a + 0i) \cdot (b + 0i) = \underline{ab}$

5) $(y + 0i) \cdot (0 + i) = \underline{yi}$

6) $(x + 0i) + (0 + yi) = \underline{x + yi}$

Berücksichtigt man das Resultat $i^2 = -1$ in der Definition der Multiplikation so erkennt man:

Komplexe Zahlen können multipliziert werden, indem man das Distributivgesetz anwendet und $i^2 = -1$ setzt.

Beispiel: $(5 - 7i)(18 + 3i) = 5 \cdot 18 - 21 \cdot i^2 + 5 \cdot 3i - 7 \cdot 18i = \underline{111 - 111i}$

Subtraktion: $z = z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$

Ist also $z_1 = x_1 + i y_1$ und $z_2 = x_2 + i y_2$, so gilt
 $z_1 - z_2 = x_1 + i y_1 - x_2 - i y_2 = x_1 - x_2 + i (y_1 - y_2)$

Beispiel: $(5 - 7i) - (18 + 3i) = \underline{-13 - 10i}$

Division: Was ist $z_1 = 1 : z$? ($z \neq 0$)

Ist $z = a + bi$, so sucht man also eine Zahl $z_1 = x + iy$ so, dass $(x + iy)(a + bi) = 1$ ist.
 $(x + iy)(a + bi) = ax - by + (ay + bx)i = 1 + 0i$.

Wegen der Gleichheit von zwei komplexen Zahlen hat man daher das

Gleichungssystem $\begin{matrix} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{matrix}$ zu lösen.

Die Lösung dieses Systems ist: $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$ ($a, b \neq 0$)

Rechnet man $\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, so erhält man dasselbe Resultat!

Definition: Die zur Zahl $z = a + bi$ gehörende Zahl $\bar{z} = a - bi$ heisst **konjugiert komplex**.

Man dividiert also komplexe Zahlen, indem man den Quotienten mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert!

Beispiele:

$$1) \frac{8+2i}{4-i} = \frac{8+2i}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{32-2+16i}{16+1} = \frac{30+16i}{17} = \frac{30}{17} + \frac{16}{17}i$$

$$2) \frac{(5+5i)-(5-5i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10i}{5} = 2i$$

Eigenschaften von konjugiert komplexen Zahlen: ($z = a + bi$)

1. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, $z \bar{z} \geq 0$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$
4. $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ (Beweise als Aufgabe)

Lösen von Gleichungen

Da die algebraische Struktur $\langle \mathbb{C}; +, \cdot \rangle$ ein Körper ($\langle \mathbb{C}; + \rangle$ kommutative Gruppe, $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot \rangle$ kommutative Gruppe, Distributivgesetz gilt) ist, so kann man Gleichungen analog wie in der Menge \mathbb{R} auflösen:

Beispiele:

$$1) (2+i)z - (5+2i) = 8-3i$$

$$z = \frac{13-i}{2+i} = \frac{13-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \underline{5-3i}$$

$$2) z^2 = -50 = 50i^2 \quad z_1 = \underline{5\sqrt{2}i}, \quad z_2 = \underline{-5\sqrt{2}i}$$

$$3) z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm d}{2}, \text{ wobei } d^2 = -4. \text{ Also } d_1 := d = 2i, d_2 = -2i$$

Die Lösung $d_2 = -2i$ ist wegen \pm bereits enthalten. $z_1 = \underline{-2 + i}$, $z_2 = \underline{-2 - i}$

$$4) z^2 = -32 + 24i$$

Der Ansatz $z = x + iy$ führt wegen $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ auf das Gleichungssystem
 $x^2 - y^2 = -32$
 $2xy = 24$

Dieses führt auf die biquadratische Gleichung $x^4 + 32x^2 - 144 = 0$ in \mathbb{R} .
 Da $x_1^2 = 4$ und $x_2^2 = -36$, so sind in \mathbb{R} (!) nur die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$
 zulässig. Die dazugehörigen y -Werte heissen $y_1 = 6$ und $y_2 = -6$.

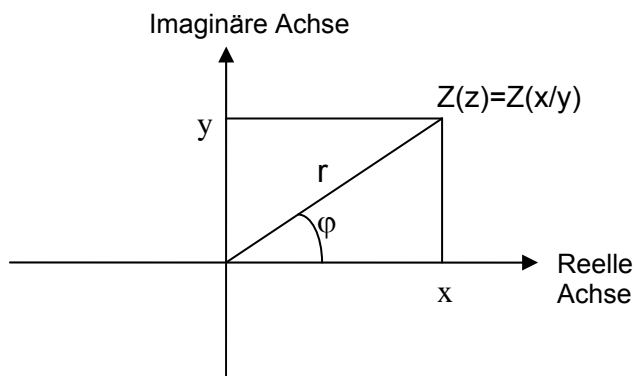
Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind daher:

$$z_1 = \underline{2 + 6i}, z_2 = \underline{-2 - 6i} = -z_1$$

(eine einfachere Lösungsmöglichkeit: s. später mit Polarformdarstellung von z)

4. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen in der Gauss-Ebene

Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ kann durch einen Punkt $Z(x/y)$ in der Ebene dargestellt werden. In diesem Fall nennt man die Ebene die Gauss'sche Zahlenebene.



Jede komplexe Zahl ist auch bestimmt durch die Polarkoordinaten (r, φ) des Punktes $Z(x/y)$. Gemäss den Umrechnungsformeln gilt: $0 \leq \varphi < 2\pi$ (bzw. $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$)

$$\text{Betrag von } z := |z| := r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

(für Bestimmung des Argumentes φ : Quadrantenlage beachten!)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

(nach Definitionen der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel)

$$\text{Es gilt also: } z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi := r \text{ cis } \varphi := r e^{i\varphi}$$

Gleichheit von komplexen Zahlen in Polarform:

$$r_1 \operatorname{cis} \varphi_1 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ und } \varphi_2 = \varphi_1 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$0 \operatorname{cis} \varphi_1 = 0 \operatorname{cis} \varphi_2 = 0 \quad \text{für beliebige } \varphi_1, \varphi_2$$

4. Die Rechenoperationen in der Gauss-Ebene

Sei $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$, $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2$ und $z = r \operatorname{cis} \varphi$

a) Addition

$$z = z_1 + z_2 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1 + r_2 \operatorname{cis} \varphi_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + i(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2)$$

Die Addition erfolgt also 'komponentenweise' (vergleiche "Vektoraddition" von Vektoren in der Grundebene)

Das Resultat in Polarform $r = \dots$ und $\varphi = \dots$ ist kompliziert!

b) Multiplikation

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \varphi_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + i r_1 \sin \varphi_1) \cdot (r_2 \cos \varphi_2 + i r_2 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i r_1 r_2 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 (\operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)) = r \operatorname{cis} \varphi \end{aligned}$$

Bei Multiplikationen komplexer Zahlen in Polarform werden also die Beträge multipliziert und die Argumente addiert:

$$r = r_1 r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Dies rechtfertigt auch die Schreibweise für $z = r e^{i\varphi}$:

$$z = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

c) Subtraktion

$$z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad \text{"Vektorsubtraktion"}$$

d) Division

$$z = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} \quad \text{Da also } z \cdot z_2 = z_1, \text{ so muss gelten:}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Beispiele: $z_1 = 5 \operatorname{cis} 30^\circ$, $z_2 = 2 \operatorname{cis} 10^\circ$ (s. auch [Applet](#) auf www.mathematik.ch)

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= z_1 + z_2 = 5 \cos 30^\circ + 2 \cos 10^\circ + i(5 \sin 30^\circ + 2 \sin 10^\circ) \approx \\ &\approx 6.2297 + 2.847 i \approx \underline{\underline{6.913 \operatorname{cis} (24.32^\circ)}} \end{aligned}$$

(Die Addition erfolgt also in Normalform mit anschliessender Umrechnung in Polarform!)

$$2) z = z_1 \cdot z_2 = \underline{10 \text{ cis } 40^\circ}$$

$$3) z = \frac{z_1}{z_2} = \underline{2.5 \text{ cis } 20^\circ}$$

$$4) z = \frac{z_2}{z_1} = 0.4 \text{ cis } (-20^\circ) = \underline{0.4 \text{ cis } 340^\circ} \quad (\text{Argument zwischen } 0^\circ \text{ und } 360^\circ)$$

e) Potenzieren

$$z = r \text{ cis } \varphi \rightarrow (\text{wegen Multiplikation}) \quad z^n = r^n \text{ cis } (n\varphi) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow (\text{wegen Division}) \quad \frac{1}{z^n} = \frac{1 \text{ cis } 0^\circ}{r^n \text{ cis } (n\varphi)} = \frac{1}{r^n} \text{ cis } (-n\varphi) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Zusammengefasst: } z = r \text{ cis } \varphi \rightarrow \mathbf{z^k = r^k \text{ cis}(k\varphi)} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

(Formel von Moivre)

$$\text{Spezialfall: } r = |z| = 1: \quad (\text{cis } \varphi)^k = (\mathbf{\cos \varphi + i \sin \varphi})^k = \mathbf{\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)}$$

Beispiele:

$$1) (2 \text{ cis } 30^\circ)^5 = \underline{32 \text{ cis } 150^\circ}$$

$$2) (\sqrt{3} + i)^6 = \dots \quad \text{mit binomischem Lehrsatz ... selber!}$$

$$(\sqrt{3} + i)^6 = (2 \text{ cis } 30^\circ)^6 = 64 \text{ cis } 180^\circ = \underline{-64}$$

$$3) (1 + i)^{10} = (\sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ)^{10} = 2^5 \text{ cis } 450^\circ = 32 \text{ cis } 90^\circ = \underline{32i}$$

$$4) \sin 3\varphi = ? \quad \cos 3\varphi = ?$$

Formel von Moivre für $r = |z| = 1$ und $k = 3$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \underline{\cos 3\varphi} + i \underline{\sin 3\varphi}$$

Nach binomischem Lehrsatz:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi = \\ &= (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) + i (3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

Also gilt wegen Gleichheit komplexer Zahlen in Normalform:

$$\underline{\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}; \quad \underline{\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi}$$

f) Radizieren

Lösungen der Gleichung $z^n = a = r \operatorname{cis} \varphi$ für $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$?

Sei $z = s \operatorname{cis} \psi$ $s = ?$, $\psi = ?$

Potenzieren: $z^n = s^n \operatorname{cis}(n\psi) = a = r \operatorname{cis} \varphi$

Gleichheit in Polarform: $s^n = r$ und $n\psi = \varphi + k 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Daher gilt: $s = \sqrt[n]{r}$ und $\psi = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}$

Es gibt aber nicht beliebig viele ψ , sondern **genau n**:

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$

Die Gleichung $z^n = a = r \operatorname{cis} \varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) hat **genau n** Lösungen $z_k = \sqrt[n]{a}$, nämlich

$$z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right), \text{ wobei } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Bemerkungen:

1. Diese Lösungen haben alle denselben Betrag $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, unterscheiden sich also nur durch das Argument (den Winkel).
2. In den reellen Zahlen \mathbb{R} gilt für $a \in \mathbb{R}$ ($a \geq 0$): $\sqrt[n]{a}$ ist eindeutig!
In \mathbb{C} ist die Schreibweise $\sqrt[n]{a}$ nicht mehr eindeutig!

Spezialfall:

Die n Lösungen der Gleichungen $z^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) heissen **n-te Einheitswurzeln**.

Beispiele:

1) Wie heissen die vierten Einheitswurzeln?

$$\underline{z_0 = 1, z_1 = \operatorname{cis} 90^\circ = i, z_2 = \operatorname{cis} 180^\circ = -1, z_3 = \operatorname{cis} 270^\circ = -i}$$

2) Berechne sämtliche Lösungen von $z^6 = -1$.

$$a = -1 = \operatorname{cis} 180^\circ, \text{ d.h. } |a| = r = 1, \varphi = 180^\circ$$

$$z_k = \sqrt[6]{1} \operatorname{cis}\left(\frac{180^\circ}{6} + k \frac{360^\circ}{6}\right) = \operatorname{cis}(30^\circ + k \cdot 60^\circ), \text{ wobei } k = 0, 1, \dots, 5$$

$$\underline{z_0 = \operatorname{cis} 30^\circ, z_1 = \operatorname{cis} 90^\circ = i, z_2 = \operatorname{cis} 150^\circ, z_3 = \operatorname{cis} 210^\circ, z_4 = \operatorname{cis} 270^\circ = -i, z_5 = \operatorname{cis} 330^\circ}$$

Je zwei Lösungen sind konjugiert komplex: $\overline{z_0} = z_5, \overline{z_1} = z_4, \overline{z_2} = z_3$

Aufgabe: Stelle die sechs Lösungen in der Gauss-Ebene dar!

3) Bestimme die Lösungsmenge L der Gleichung $z^2 = 3 - 4i$

$$a = 3 - 4i = 5 \operatorname{cis} 306.87^\circ$$

$$z_k = \sqrt{5} \operatorname{cis}\left(\frac{306.87^\circ}{2} + k \frac{360^\circ}{2}\right) = \sqrt{5} \operatorname{cis}(153.435^\circ + k \cdot 180^\circ), \text{ wobei } k = 0, 1$$

$$z_0 = \sqrt{5} \operatorname{cis} 153.435^\circ = -2 + i, \quad z_1 = \sqrt{5} \operatorname{cis} 333.435^\circ = 2 - i$$

$$L = \{-2 + i, 2 - i\}$$

Die reinquadratische Gleichung $z^2 = a$ hat folglich (wegen Addition von 180°) immer zwei Lösungen z_0 und z_1 , wobei $z_1 = -z_0$.

5. Gleichungen zweiten und höheren Grades

a) Die quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten

Gegeben sei die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit komplexen Koeffizienten a, b und c ($a \neq 0$).

Division mit a und quadratische Ergänzung liefert:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0, \text{ also } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} := \frac{z^2}{4a^2}$$

Ist also d eine der beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = b^2 - 4ac$ (vgl. auch oben, Beispiel 3)), so gilt:

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{d}{2a} \quad \text{bzw.} \quad x_2 + \frac{b}{2a} = \frac{-d}{2a}, \text{ also}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{d}{2a} \quad \text{bzw.} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{d}{2a}$$

Zusammengefasst:

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ heissen $x_{1,2} = \frac{-b \pm d}{2a}$, wobei d eine Lösung der Gleichung $z^2 = b^2 - 4ac$ ist.

Man beachte die Ähnlichkeit zur Lösungsformel von quadratischen Gleichungen in \mathbb{R} . Hier wird allerdings die Wurzelschreibweise vermieden.

Beispiele:

1) $x^2 + (2 + 4i)x - 3 = 0$ ($a = 1, b = 2 + 4i, c = -3$)

$$z^2 := (2 + 4i)^2 + 12 = 4 + 16i - 16 + 12 = 16i = 16 \operatorname{cis} 90^\circ$$

$$\rightarrow d = 4 \operatorname{cis} 45^\circ = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4i + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \underline{-1 + \sqrt{2} + i(-2 + \sqrt{2})}$$

$$\underline{x_2} = \frac{-2 - 4i - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = \underline{-1 - \sqrt{2} + i(-2 - \sqrt{2})}$$

2) $x^2 + (-13 + 10i)x + 19 - 71i = 0$

$$z^2 := 169 - 260i - 100 - 76 + 284i = -7 + 24i = 25 \text{ cis } 106.26^\circ$$

$$\rightarrow d = 5 \text{ cis } 53.13^\circ = 3 + 4i$$

$$\underline{x_1} = \frac{13 - 10i + 3 + 4i}{2} = \underline{8 - 3i}, \quad \underline{x_2} = \frac{13 - 10i - 3 - 4i}{2} = \underline{5 - 7i}$$

Bem.: TI89 liefert diese Lösungen mit $\text{csolve}(x^2 + (-13 + 10i)x + 19 - 71i = 0, x)$

b) Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Satz: Ist z_1 Lösung einer Gleichung zweiten oder höheren Grades mit reellen Koeffizienten, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ Lösung dieser Gleichung.

Beweis:

Eine Gleichung n-ten Grades habe die Form

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Da z_1 Lösung dieser Gleichung, so gilt:

$$a_n \cdot z_1^n + a_{n-1} \cdot z_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z_1 + a_0 = 0.$$

Bildet man links und rechts des Gleichheitszeichens die konjugiert komplexe Zahl, so gilt (Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl: s. p. 3)

$$\overline{a_n \cdot z_1^n + a_{n-1} \cdot z_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z_1 + a_0} = \overline{0}. \quad \text{Da } a \in \mathbb{R} \rightarrow \overline{a} \in \mathbb{R}, \text{ so folgt:}$$

$$a_n \cdot \overline{z_1^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z_1^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \overline{z_1} + a_0 = 0. \quad \text{Wendet man wieder die Eigenschaften der konjugiert komplexen Zahl an, so gilt:}$$

$$a_n \cdot \overline{z_1^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z_1^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \overline{z_1} + a_0 = 0. \quad \text{Also folgt die Behauptung.}$$

Aufgabe:

Die Gleichung $z^4 - 12z^3 + az^2 + bz + 72 = 0$ hat zwei rein imaginäre Lösungen sowie eine reelle Doppellösung. Bestimme a, b. ($a, b \in \mathbb{R}$)

Lösung:

$z_1 = z_2 \in \mathbb{R}, z_3 = \alpha i \ (\alpha > 0)$. Nach dem Satz gilt dann $z_4 = \overline{\alpha i} = -\alpha i$. Es ist also

$$(z - z_1)^2 (z - \alpha i) (z + \alpha i) \equiv z^4 - 12z^3 + az^2 + bz + 72 \quad (\text{für alle } z)$$

$$(z^2 - 2z_1z + z_1^2) (z^2 + \alpha^2) = z^4 + z^3(-2z_1) + z^2(\alpha^2 + z_1^2) + z(-2z_1\alpha^2) + \alpha^2 z_1^2$$

Der Koeffizientenvergleich (reelle Koeffizienten) liefert:

$$12 = 2z_1, \text{ also } z_1 = 6; \quad \alpha^2 z_1^2 = 72, \text{ also } \alpha^2 = 2; \quad \underline{a} = \alpha^2 + z_1^2 = \underline{36}; \quad \underline{b} = -2z_1\alpha^2 = \underline{-24}$$

c) Fundamentalsatz der Algebra

Fundamentalsatz der Algebra

In \mathbb{C} lässt sich jedes Polynom n-ten Grades (mit komplexen Koeffizienten a_i) in Linearfaktoren zerlegen:

$$P_n(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \text{ d.h.}$$

jede Gleichung n-ten Grades hat in \mathbb{C} genau n Lösungen (mehrfache Lösungen werden dabei mehrfach gezählt).

Diesen Fundamentalsatz hat C.F.Gauss 1797 in seiner Dissertation bewiesen. Hier wird auf den Beweis verzichtet.

Man beachte den Gegensatz zu \mathbb{R} , wo sich nicht jedes Polynom zweiten Grades in Linearfaktoren zerlegen lässt.

Aufgaben:

1a) Wie gross ist das **Produkt** aller fünften Einheitswurzeln?

Die Lösungen der Gleichung $z^5=1$ seien z_1, z_2, \dots, z_5 .

Da $z^5 - 1 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_5)$, so muss

$-z_1 \cdot z_2 \cdots z_4 \cdot z_5 = -1$, also das Produkt dieser Einheitswurzeln = 1 sein.

b) Die Verallgemeinerung auf die Lösungen der Gleichung $z^n = a$ ($a \in \mathbb{C}$) erfolgt sinngemäss und lautet:

Ist n ungerade, so ist das Produkt aller Lösungen = a

Ist n gerade, so ist das Produkt aller Lösungen = -a.

2a) Wie gross ist die **Summe** aller fünften Einheitswurzeln?

Da $z^5 - 0 \cdot z - 1 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_5) = z^5 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)z^4 + \dots - \dots$,

so muss $\sum_{i=1}^5 z_i = 0$ sein.

b) Die Verallgemeinerung auf die Lösungen der Gleichung $z^n = a$ ($a \in \mathbb{C}$) erfolgt sinngemäss und lautet:

Falls z_1, z_2, \dots, z_n die n Lösungen der Gleichung $z^n = a$ sind, so gilt: $\sum_{i=1}^n z_i = 0$.