Einfache Differentialgleichungen (algebraische Lösung)

0. Definition, Einschränkung

Definition: Sei die Funktion mit Gleichung $y = f(x)$ n-mal differenzierbar.
Gilt $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (für alle x), so erfüllt $y=f(x)$ die **Differentialgleichung** (DGL) **F = 0 n-ter Ordnung**.

Beispiele:

1) $x^2 + 3y - \sin(x)\cdot y' + 3.5\,(y'')^2 = 0$	DGL 2. Ordnung
2a) $y' = y$ b) $y' = ky$	DGL 1. Ordnung
3) $y'' = g =$ konstant	DGL 2. Ordnung
4) $\dot{N}(t) = -k\,N(t)$	DGL 1. Ordnung

Wir betrachten zuerst Differentialgleichungen 1. Ordnung und gehen davon aus, dass die Gleichung $F(x,y,y') = 0$ nach y' aufgelöst werden kann, d.h. es gilt
$y' = g(x,y)$.

1. Trennung (Separation) der Variablen

Gegeben sei eine DGL der Form $y' = g(x,y) = \frac{z(x)}{n(y)}$

Dann gilt: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{z(x)}{n(y)}$, also $n(y)\,dy = z(x)\,dx$

Die Variablen x und y wurden also getrennt (separiert).
Integriert man beide Seiten, so erhält man die Lösung der DGL (Beweis später mit dem Integral einer Verketteten Funktion).

Beispiel 1: $y' = g(x,y) = -\frac{x}{y}$ (also $z(x) = -x$, $n(y) = y$)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

Allgemeine Lösung der DGL lautet also : $\mathbf{x^2 + y^2 = C}$ ($= 2C_1$)
für $C>0$: Schar der Kreise mit Mittelpunkt M(0/0)

Richtungsfeld und Isoklinenschar

Geometrische Deutung der DGL $y' = g(x,y)$ an Hand von Beispiel 1:

Bei $y' = g(x,y)$ lässt sich jedem Punkt $(x|y)$ ein Winkel γ zuordnen, so dass gilt:
$y' = g(x,y) = \tan\gamma$ (y' gibt ja Tangentensteigung in $(x|y)$ an)
Eine Lösung der DGL $y' = g(x,y)$ ist also eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte die vorgeschriebene Tangentensteigung hat.

Beispiel 1: $y' = g(x,y) = -\frac{x}{y}$, Definitionsbereich = π_1-Ebene ohne x-Achse

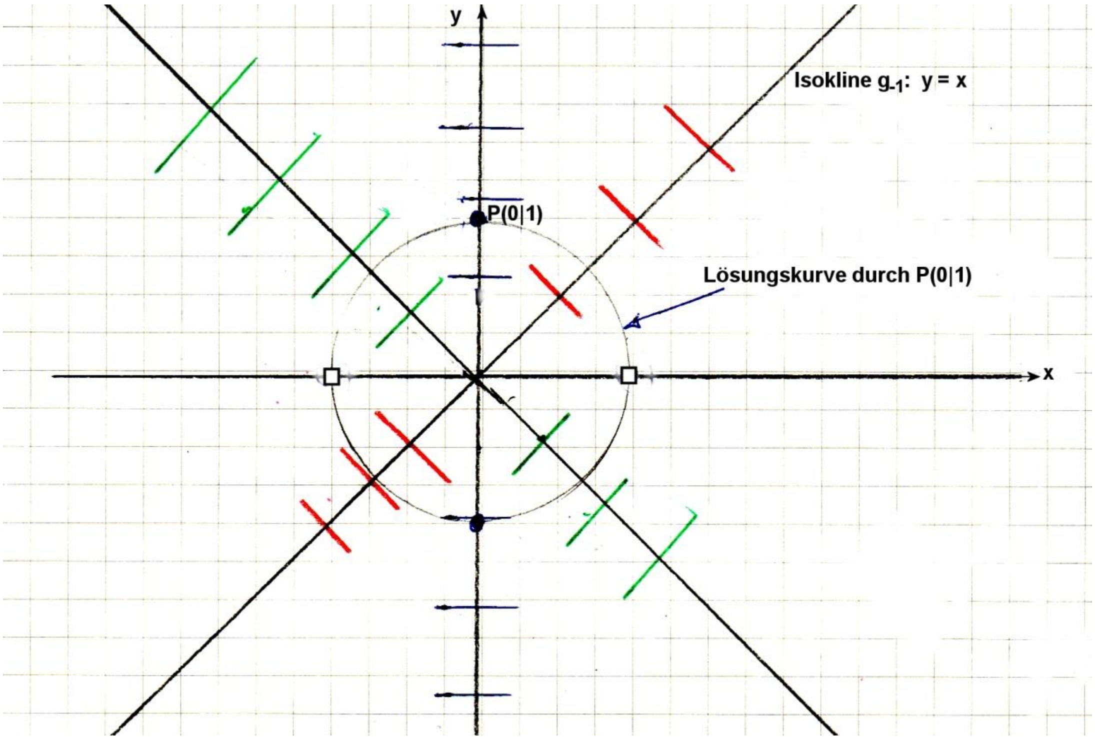
Man betrachtet $y' := k$ = konstant (zur Bestimmung der sog. **Isoklinen**)

k=-1: $-\frac{x}{y} = -1$, für Punkte auf g_{-1}: $y = x$ ist also $y'=-1$

k=1: $-\frac{x}{y} = 1$, für Punkte auf g_1: $y = -x$ ist also $y'=1$

k=0: $-\frac{x}{y} = 0$, für Punkte auf g_0: $x = 0$ (y-Achse) ist also $y'=0$

k≠0: $-\frac{x}{y} = k$, für Punkte auf g_k: $y = -\frac{x}{k}$ ist also $y'=k$



Die DGL $y' = -\frac{x}{y}$ wird also durch ein **Richtungsfeld** veranschaulicht.

Gleichung der **Isoklinenschar** lautet $y = -\frac{x}{k}$ für k≠0, bzw. x=0 für k=0.

Die Isoklinenschar ist also hier eine Geradenschar.
Gibt man eine bestimmte Anfangsbedingung $P(x_0|y_0)$ vor, so ergibt sich **eine** Lösungskurve der DGL, z.B. für $x_0=0$, $y_0=1$:
Man bestimmt nun die Konstante C in der allgemeinen Lösung: 0 + 1 = C, also C=1. Diejenige Lösungskurve der DGL, die durch den Punkt P(0|1) geht, hat also die Gleichung $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$ (Einheitskreis mit M(0|0)).

Lösung einer DGL mit TI 89 bzw TI Voyage

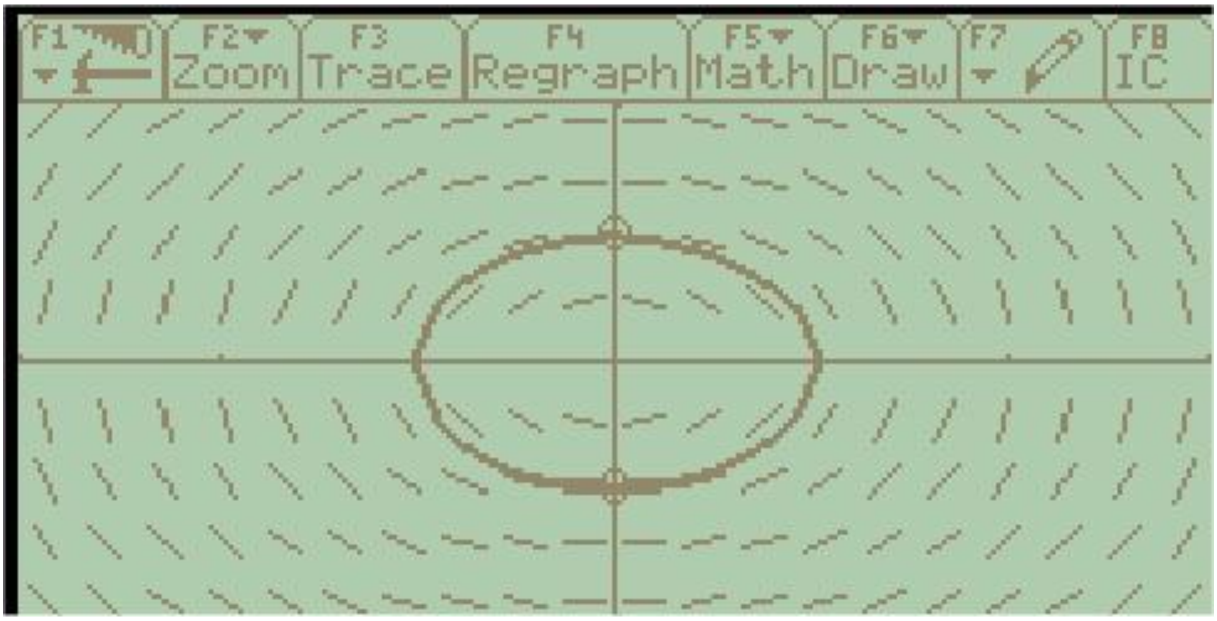
Beispiel 1: $y' = g(x,y) = -\dfrac{x}{k}$

Befehl zur allgemeinen Lösung:
deSolve(y‘=-x/y,x,y)
Nach Drücken der Eingabetaste wird die Lösungsgleichung $\mathbf{y^2 = \rho 1 - x^2}$ angezeigt. Dabei steht $\rho 1$ (oder $\rho 2$, $\rho 3$ usw.) für die Konstante C.

Befehl zur speziellen Lösung mit Anfangsbedingung:
deSolve(y‘=-x/y and y(0)=1,x,y)
Drücken der Eingabetaste erzeugt die Lösungsgleichung $\mathbf{y^2 = 1 - x^2}$

Darstellung des Richtungsfeldes mit TI 89 bzw. TI Voyage (für Beispiel 1)

Mode: DIFF EQUATIONS
Y=Editor: y1’(t) = -t/y1
GraphFormats (in Graph-Menu mit F1 erreichbar) : Axes=on, Labels=Off, SolutMethod = RK (für RungeKutta), Fields=SLPFLD
Gibt man zusätzlich yi1=1 (t0=0 vordefiniert) ein, so wird auch die dazugehörige Kurve gezeichnet.
Will man z.B. zwei Lösungskurven plotten lassen, so gibt man yi1={1 1.5} ein.
Für unser Beispiel empfiehlt sich yi1={1 -1}, denn so wird der Vollkreis und nicht nur der obere Halbkreis gezeichnet.



Beispiel 2: $y' = ky \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

a) Lösungsgesamtheit dieser DGL?
b) Gleichung derjenigen Kurve, die durch den Punkt P(0|a) geht?

a) Bereits früher wurde bewiesen, dass die Lösungsgesamtheit dieser DGL die Funktionen mit Gleichung $y = f(x) = C\,e^{kx}$ (mit $C \in \mathbb{R}$) ist.
Die Lösung erfolgt nun durch Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = ky, \text{ also } \frac{dy}{y} = k\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$$

$\ln|y| = kx + C_1$, also $|y| = e^{kx + C_1} = C_2\,e^{kx}$ (mit $C_2 = e^{C_1} \in \mathbb{R}^+$)
Für $y>0$ gilt daher $y = C_2\,e^{kx}$, für $y>0$ gilt $y = -C_2\,e^{kx}$
Für die Funktion $y = 0$ ist die DGL auch erfüllt.
Zusammengefasst:
Die Lösungsgesamtheit der DGL $y' = ky$ ist $\boldsymbol{y = f(x) = C\,e^{kx}}$ $(C \in \mathbb{R})$

b) $P(0|a) \in$ Graph G_f
Einsetzung der Koordinaten von P in Gleichung der Lösungsgesamtheit bestimmt die Konstante C:
$a = C\,e^0 = C$
Die Gleichung der gesuchten Kurve heisst also $\boldsymbol{y = f(x) = a\,e^{kx}}$

Beispiel 3: Bestimme die Lösungsgesamtheit der DGL $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

$$x\sqrt{1 + y^2} = -y\frac{dy}{dx}\sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = -\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\,dy \qquad \text{(Separation der Variablen geglückt)}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}}\,dy$$

$$\sqrt{1 + x^2} = -\sqrt{1 + y^2} + C$$

$$\boldsymbol{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C}$$

(Verzicht der Auflösung der Gleichung nach y)

Bestätigung des Resultates durch Ableiten:

$$\tfrac{1}{2}(1+x^2)^{-0.5} \cdot 2x + \tfrac{1}{2}(1+y^2)^{-0.5} \cdot 2y = 0$$

Beispiel 4: Bestimme die Lösungsgesamtheit der DGL $y' = x + y$

Diese DGL ist nicht mehr separierbar. Es muss eine neue Methode verwendet werden:

<u>Substitution</u> $u := x + y$ (u ist also eine Funktion von x)

Dann ist $u' = 1 + y'$

Also gilt $u' = 1 + u$ Dies ist eine separierbare DGL für u

$$\frac{du}{dx} = 1 + u$$

$$\frac{du}{1+u} = dx$$

$$\int \frac{du}{1+u} = \int dx$$

$$\ln|1 + u| = x + C_1$$

$$|1 + u| = e^{x+C_1} = C_2 e^x \quad (C_2 = e^{C_1} \in \mathbb{R}^+)$$

$$u = Ce^x - 1 \qquad (C \in \mathbb{R})$$

<u>Resubstitution</u>: $x + y = Ce^x - 1$

Also lautet die Lösungsgesamtheit der ursprünglichen DGL

$$\mathbf{y = Ce^x - x - 1}$$

Beispiel 5: Bestimme die Lösungsgesamtheit der DGL $y' = 2(3x + 2y + 1)$

Substitution $u := 3x + 2y + 1$

$u' = 3 + 2y' = 3 + 2\cdot 2u = 3 + 4u$

$$\frac{du}{dx} = 3 + 4u$$

$$\frac{du}{3+4u} = dx$$

$$\int \frac{du}{3+4u} = \int dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|3 + 4u| = x + C_1$$

$$|3 + 4u| = e^{4x+4C_1} = C_2 e^{4x} \quad (C_2 = e^{4C_1} \in \mathbb{R}^+)$$

$$3 + 4u = C_3\, e^{4x} \qquad (C_3 \in \mathbb{R})$$

<u>Resubstitution</u>: $3 + 4(3x + 2y + 1) = C_3\, e^{4x}$

$8y + 12x = C_3\, e^{4x} - 7$

Also lautet die Lösungsgesamtheit der ursprünglichen DGL

$$\mathbf{y = Ce^{4x} - \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Kontrolle durch Einsetzen in gegebener DGL:

Linke Seite: $y' = 4Ce^{4x} - \frac{3}{2}$

Rechte Seite: $6x + 4(Ce^{4x} - \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}) + 2 = 4Ce^{4x} - \frac{3}{2}$

Verallgemeinerung: Jede DGL der Form y' = g(ax + by + c) kann mit Hilfe der Substitution u := ax + by + c auf eine separierbare DGL in u und x geführt werden:

$$\frac{du}{dx} = a + by' = a + b\,g(u)$$

$$\frac{du}{a + b\,g(u)} = dx$$

$$\int \frac{du}{a + bg(u)} = \int dx$$

Daraus entsteht eine Funktion u in Abhängigkeit von x und mit der Resubstitution dann die Lösungsgesamtheit y = f(x) der ursprünglichen DGL.

Aufgabe: Bestimme die Differentialgleichung aller Kurven, die **jede** Hyperbel der Schar xy = a ($a \in \mathbb{R}$) rechtwinklig schneiden. Von welcher Art ist die zweite Kurvenschar?

Lösung: Für die gegebene Schar gilt: $f(x) = \frac{a}{x}$, also $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$. Sei y = g(x) die Gleichung der gesuchten Schar. Im Schnittpunkt S(x|y) gilt:

Steigung m_1 der gegeben Schar ist $-\frac{a}{x^2}$, Steigung m_2 der gesuchten Schar ist g'(x)=y'. Da $m_1 \cdot m_2 = -1$, so gilt: $-\frac{a}{x^2} \cdot y' = -1$ und a = xy. Also lautet die Differentialgleichung für die gesuchten Kurven: $y' = \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y}$

(Sie muss unabhängig von a sein, denn die gesuchte Kurve muss **jede** Hyperbel der gegebenen Schar schneiden!)

Die Gleichung ihre Lösungsgesamtheit lautet $y^2 - x^2 = C$ (selber!)

Dies sind Hyperbeln für $C \neq 0$ und zwei Geraden für C = 0.

[Lösung der DGL $y' = \frac{x}{y}$:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, also y dy = x dx, daher $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$, also $y^2 - x^2 = 2C_1 = C$]

2. Lineare Differentialgleichungen

Definition: Eine DGL 1. Ordnung heisst **linear**, wenn sie folgende Form hat:
$\mathbf{y' = f_1(x)\cdot y + f_2(x)}$ (*)
$y' = f_1(x)\cdot y$ heisst die zu (*) gehörende **homogene** DGL.
Ist $f_2(x) \neq 0$, so ist (*) eine **inhomogene** DGL.

Beispiele:

Beispiel 2:	$y' = ky$	$f_1(x)=k$, $f_2(x)=0$	Homogene: $y' = ky$
Beispiel 4:	$y' = y + x$	$f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$	Homogene: $y' = y$
Beispiel 5:	$y' = 4y + 6x + 2$	$f_1(x)=4$, $f_2(x)=6x + 2$	Homogene: $y' = 4y$
Beispiel 6:	$y' = xy + x$	$f_1(x)=x$, $f_2(x)=x$	Homogene: $y' = xy$
Beispiel 7:	$y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$	$f_1(x)=\frac{1}{x^2}$, $f_2(x)=\sin x$	Homogene: $y' = \frac{1}{x^2}y$
Beispiel 8:	$y' = -y + e^x$	$f_1(x)=-1$, $f_2(x)= e^x$	Homogene: $y' = -y$

a) Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot y$$

$\frac{dy}{y} = f_1(x)\,dx$, also $\ln|y| + \ln C_1 = \ln|C_1 y| = \int f_1(x)\,dx$ $(C_1 \in \mathbb{R}^+)$

Lösungsgesamtheit der homogenen DGL: $\mathbf{y = C\,e^{\int f_1(x)\,dx} := C\,g(x)}$ $(C \in \mathbb{R})$

Beispiel 4: $y' = y$ hat Lösung $y = C\,e^{\int 1dx} = C\,e^{x}$

Beispiel 5: $y' = 4y$ hat Lösung $y = C\,e^{\int 4dx} = C\,e^{4x}$

Beispiel 6: $y' = xy$ hat Lösung $y = C\,e^{\int xdx} = C\,e^{\frac{x^2}{2}}$

Beispiel 7: $y' = \frac{1}{x^2}y$ hat Lösung $y = C\,e^{\int x^{-2}dx} = C\,e^{-\frac{1}{x}}$

Beispiel 8: $y' = -y$ hat Lösung $y = C\,e^{-\int 1dx} = C\,e^{-x}$

b) Lösung der inhomogenen linearen DGL

Erläuterung an Hand des Beispiels 4 : $y' = x + y$ (*)
Diese lineare DGL wurde (s. Seite 5) mit der Substitution $u := x + y$ gelöst.

Die Lösungsgesamtheit ist $\mathbf{y = C\,e^{x} - x - 1}$

Der Vergleich mit der Lösungsgesamtheit $y = C\,e^{x}$ der dazugehörigen homogenen DGL $y' = y$ zeigt:

$y = C\,e^{x} + y_0$, wobei $y_0 = -x - 1$

Da $y_0' = -1$, so ist $y_0' = x + (-x - 1) = x + y_0$, d.h. y_0' ist selber eine Lösung der inhomogenen DGL (*).
Tatsächlich gilt die Verallgemeinerung:

Satz: Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL $y' = f_1(x) \cdot y + f_2(x)$ (*) erhält man, indem man zur Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL $y' = f_1(x) \cdot y$ eine beliebige Lösung (**partikuläre** Lösung) y_0 von (*) addiert.

Beweis: $y' = f_1(x) \cdot y + f_2(x)$ (*) , $y' = f_1(x) \cdot y$ (**)
Sei y_0 eine partikuläre Lösung von (*)

a) Zu zeigen: Jede beliebige Lösung y_1 von (*) kann in der Form $y_1 = y + y_0$ mit y Lösung von (**) geschrieben werden.
In der Tat: $y = y_1 - y_0$, also $y' = y_1' - y_0' = f_1(x) \cdot y_1 + f_2(x) - (f_1(x) \cdot y_0 + f_2(x)) = f_1(x) \cdot (y_1 - y_0)$, d.h. y ist Lösung von (**).

b) Zu zeigen: Ist y eine beliebige Lösung von (**), so ist $y_1 = y + y_0$ eine Lösung von (*).
In der Tat: $y_1' = y' + y_0' = f_1(x) \cdot y + f_1(x) \cdot y_0 + f_2(x) = f_1(x) \cdot (y + y_0) + f_2(x)$

Beispiel 5: $y' = 4y + 6x + 2$ (*)

Die homogene DGL $y' = 4y$ hat Lösungsgesamtheit $y = C e^{4x}$
Partikuläre Lösung $y_0 = ?$
Damit 4y und $f_2(x) = 6x + 2$ ‚verrechenbar' sind, machen wir für y_0 einen linearen Ansatz: $y_0 = mx + q$, m= ?, q = ?
Einsetzen von y_0 und $y_0' = m$ in (*): $m = 4mx + 4q + 6x + 2$, also
$x(4m + 6) + 4q - m + 2 \equiv 0$ (für alle x)
Daher muss $4m + 6 = 0$, folglich $m = -1.5$ und damit $4q + 1.5 + 2 = 0$, folglich $q = -0.875$ sein. Es ist $y_0 = -1.5x - 0.875$.
Die Lösungsgesamtheit der DGL (*) ist also

$$\mathbf{y = C e^{4x} - \frac{3}{2} x - \frac{7}{8}}$$

Dies entspricht auch der früher (s. Seite 5) hergeleiteten Lösung.

Beispiel 6: $y' = xy + x$ (*)

Die homogene DGL $y' = 4y$ hat Lösungsgesamtheit $y = C e^{\frac{x^2}{2}}$
Partikuläre Lösung $y_0 = ?$
Damit xy und $f_2(x) = x$ verrechenbar sind, machen wir für y_0 den Ansatz:
$y_0 = k$, k = ?
Einsetzen von y_0 und $y_0' = 0$ in (*): $0 = xk + x = x(k + 1)$ (für alle x), also muss $k = -1$ ein. Es ist $y_0 = -1$.

Die Lösungsgesamtheit der DGL (*) ist also $\mathbf{y = C e^{\frac{x^2}{2}} - 1}$

Beispiel 7: $y' = \frac{1}{x^2} y + \sin x$ (*)

Die homogene DGL $y' = \frac{1}{x^2} y$ hat Lösung $y = C e^{-\frac{1}{x}}$

Partikuläre Lösung $y_0 = ?$ Schwierig! Allgemeines Verfahren?

Beispiel 8: $y' = -y + e^x$ (*)

Die homogene DGL $y' = -y$ hat Lösungsgesamtheit $y = C e^{-x}$

Partikuläre Lösung y_0 = ?

Damit $-y$ und e^x verrechenbar sind, machen wir den Ansatz

$y_0 = k e^x$

$y_0' = k e^x = - k e^x + e^x$, also $2k e^x = e^x$ (für alle x)

Also ist 2k=1, daher k = 0.5. Es ist $y_0 = 0.5 e^x$

Die Lösungsgesamtheit der DGL (*) ist also $\mathbf{y = C e^{-x} + 0.5 e^x}$

Beispiel 9: $xy' = x^2 + y$

$y' = \frac{1}{x} y + x$ mit $x \neq 0$ (*)

Homogen: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ also $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|$

Lösungsgesamtheit der homogenen DGL: $y = Cx$

Partikuläre Lösung y_0 von (*): $y_0 = x^2$, denn $y_0' = 2x = \frac{1}{x} x^2 + x$

Die Lösungsgesamtheit der DGL (*) ist also $\mathbf{y =} Cx + x^2 = \mathbf{x\,(x + C)}$

Allgemeines Verfahren zum Finden der partikulären Lösung y_0
(Variation der Konstanten)

Manchmal ist es nicht einfach, eine partikuläre Lösung zu finden. Man versucht dann, die Konstante C in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zu variieren:

Erläuterung an Hand des Beispiels 4 : $y' = y + x$ (*), $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$

Die dazugehörige homogene DGL $y' = y$ hat Lösungsgesamtheit $y = C\,g(x) = C e^x$

Ansatz für y_0: $y_0 = C(x) e^x$

Einsetzen von y_0' und y_0 in (*): $y_0' = C'(x) e^x + C(x) e^x = C(x) e^x + x$

Also ist $x = C'(x) e^x$ und damit $C'(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{f_2(x)}{g(x)}$

Partielle Integration oder TI liefert $C(x) = (-x - 1)\, e^{-x}$

$y_0 = C(x) e^x = -x - 1$

Die Lösungsgesamtheit von (*) ist also $\mathbf{y = C e^x - x - 1}$

Tatsächlich gilt der

Satz: $y' = f_1(x) \cdot y + f_2(x)$ (*) , $y' = f_1(x) \cdot y$ (**)

Sei $y = C e^{\int f_1(x)\,dx} = C\,g(x)$ die Lösungsgesamtheit der homogenen DGL (**)

Eine Lösung y_0 von (*) hat die Form $y_0 = C(x)\,g(x)$ (Variation der Konstanten) mit

$C(x) = \int \frac{f_2(x)}{g(x)}\,dx$.

Beweis: g(x) erfüllt die homogene DGL, also $g'(x) = g(x) \cdot f_1(x)$

$$y'_0 = C'(x)\, g(x) + C(x)\, g'(x) = \frac{f_2(x)}{g(x)} \cdot g(x) + C(x)\, g(x) \cdot f_1(x) = f_1(x) \cdot y_0 + f_2(x)$$

Also erfüllt y_0 die DGL (*)

Natürlich wird das Verfahren der Variation der Konstanten zum Finden von y_0 im Prinzip nur dann benützt, wenn es keinen einfacheren Ansatz gibt. Als Übung sollen nun aber doch unsere Beispiele mit diesem Verfahren betrachtet werden.

Beispiel 6: $y' = xy + x$ (*)

Lösung mit Hilfe der Variation der Konstanten (selber!)

Zur Kontrolle: $C(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$

Beispiel 7: $y' = \frac{1}{x^2} y + \sin x$ (*)

Der Ansatz $y_0 = C(x)\, e^{-\frac{1}{x}}$ führt auf das zu (!) schwierige Integral

$$\int e^{\frac{1}{x}} \sin x \, dx$$

Beispiel 8: $y' = -y + e^x$ (*)

Lösung mit Hilfe der Variation der Konstanten (selber!)

Zur Kontrolle: $C(x) = \int \left(e^x\right)^2 dx = \int e^{2x} dx = 0.5e^{2x}$

Beispiel 9: $xy' = x^2 + y$

Lösung mit Hilfe der Variation der Konstanten (selber!)

Zur Kontrolle: $C(x) = x$

3. „Homogene" Differentialgleichungen

Definition: Eine DGL der Form $y' = g(\frac{y}{x})$ heisst „homogene" DGL

Bemerkung: Der Begriff „homogen" hat mit dem früheren Begriff ‚dazugehörige homogene DGL' nichts zu tun!

Lösung: Die Substitution $u := \frac{y}{x}$ führt immer auf eine separierbare DGL in u und x. (Ohne Beweis)

Beispiel 1: $y' = 2\frac{y}{x} + 1$

Diese DGL ist auch **linear** mit $f_1(x) = \frac{2}{x}$ und $f_2(x) = 1$. Es könnte also das Lösungsverfahren von Kapitel 2 angewendet werden (selber!)

Substitution: $u := \frac{y}{x}$ Also gilt y = xu und damit y' = u + xu'

y' = 2u + 1 = u + xu' und damit u'x = u + 1

$$\frac{du}{u+1} = \frac{1}{x}dx$$

Integration liefert ln |u + 1| = ln |x| + ln |C| =ln |Cx|

u + 1 = Cx mit $C \in \mathbb{R}$

Resubstitution: $\frac{y}{x}$ = Cx - 1, also lautet die Lösungsgesamtheit der ursprünglichen DGL **$y = Cx^2 - x = x(Cx - 1)$**

Beispiel 2: $y' = \frac{y+x}{y-x} = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}$ (für x ≠ 0)

Substitution: $u := \frac{y}{x}$ Also gilt y = xu und damit y' = u + xu'

$y' = \frac{u+1}{u-1}$ = u + xu'

Nach einigem Umformen ergibt sich $\int \frac{u-1}{-u^2+2u+1}du = \int \frac{1}{x}dx$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2(u-1)}{u^2-2u-1}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$-\frac{1}{2}$ ln $|u^2 - 2u - 1|$ = ln |x| + ln $|C_1|$ =ln $|C_1x|$

$$\left|u^2-2u-1\right|^{-\frac{1}{2}} = \left|C_1x\right|$$

$$\left|u^2-2u-1\right| = \frac{1}{C_1^2x^2}$$

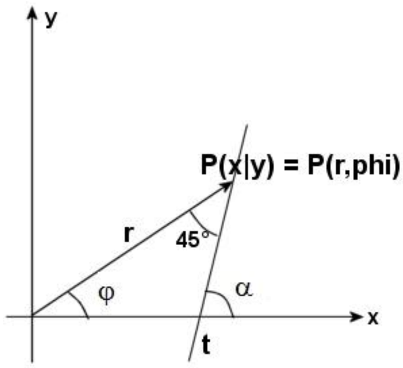
$u^2 - 2u - 1 = \frac{1}{Cx^2}$ mit $C \in \mathbb{R}$

Resubstitution liefert $\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1 = \frac{1}{Cx^2}$

Die Lösungsgesamtheit der ursprünglichen DGL lautet also

$y^2 - 2xy - x^2 = C$

Beispiel 3: Gesucht sind alle Kurven, die sämtliche dazugehörigen Ortsvektoren unter dem gleichen Winkel 45° schneiden.
(vergleiche dazu auch die Lösung des Käferproblems http://www.mathematik.ch/puzzle/puzzle21.php)



t: Tangente im Punkt P(x|y) der gesuchten Kurve.
Neigungswinkel α der Tangente t

Es ist y' = tan α = Steigung der Tangente t
$\alpha = \varphi + 45°$

$$y' = \tan(\varphi + 45°) = \frac{\tan\varphi + \tan 45°}{1 - \tan\varphi \tan 45°} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{1 - \frac{y}{x}}$$

Die Aufgabe führt also auf eine „homogene“ DGL.

Substitution: $u := \frac{y}{x}$ Also gilt y = xu und damit y' = u + xu'

$$y' = \frac{u+1}{1-u} = u + xu'$$

Nach einigem Umformen erhält man $\int \frac{1-u}{u^2+1}du = \int \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{1}{u^2+1}du - \int \frac{u}{u^2+1}du = \ln|x| + \ln|k| = \ln|kx|$$

arctan u – 0.5ln(u^2 + 1) = ln
arctan u = ln (|kx|(u^2 + 1)$^{0.5}$)

Resubstitution: $\arctan\frac{y}{x} = \ln\left(|kx|\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)^{0.5}\right) = \ln\left(|k|\,(y^2 + x^2)^{0.5}\right)$

Verwendet man Polarkoordinaten ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$), so gilt:

φ = ln (|k| r) bzw. **r = Ce**$^{\varphi}$
Dies ist die Gleichung der logarithmischen Spirale.

4. Eine spezielle Differentialgleichung 2. Ordnung

Beispiel: $\ddot{y} = g - k\dot{y}$ ($k \in \mathbb{R}^+$, g: Erdbeschleunigung = konstant)
y(t): Weg, $\dot{y}$(t);: Geschwindigkeit v(t), $\ddot{y}$(t): Beschleunigung a(t)
Anfangsbedingungen: y(0) = 0, v(0) = 0,
Die DGL kann mit Hilfe $\dot{y} = v$ auf eine lineare DGL in v zurückgeführt werden:
$\dot{v} = -kv + g$

Separation der Variablen ist möglich: $\frac{dv}{dt} = -kv + g$

$$\frac{dv}{v - \frac{g}{k}} = -k\,dt$$

$$\ln \left| v - \frac{g}{k} \right| = -kt + C_1$$

$$v - \frac{g}{k} = C_1 e^{-kt}$$

$$v(t) = \frac{g}{k} + C_1 e^{-kt}$$

Aus der Anfangsbedingung v(0) = 0 bestimmt man die Konstante C_1:

$v(0) = 0$: $\frac{g}{k} + C_1 e^{-k0} = \frac{g}{k} + C_1 = 0$, also $C_1 = -\frac{g}{k}$

$$v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{dy}{dt}$$

Also ist $y(t) = \frac{g}{k} \int (1 - e^{-kt})\,dt = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt}\right) + C_2$

Aus der Anfangsbedingung y(0) = 0 bestimmt man die Konstante C_2:

$y(0) = 0$: $\frac{g}{k^2} + C_2 = 0$, also $C_2 = -\frac{g}{k^2}$

Die Lösung der DGL mit den gegebenen Anfangsbedingungen lautet also:

$$\mathbf{y(t) = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} - \frac{1}{k}\right)}$$

Bemerkung: Die DGL $\dot{v} = -kv + g$ kann natürlich auch mit dem Ansatz für lineare DGL gelöst werden. Die Lösungsgesamtheit der dazugehörigen homogenen DGL $\dot{v} = -kv$ lautet $v = C_1 e^{-kt}$. Eine partikuläre Lösung v_0 erhält man durch den Ansatz v_0 (= v_∞) = konstant.

Es gilt dann $v_0' = 0 = -k\, v_0 + g$, also $v_0 = \frac{g}{k}$

Die Lösungsgesamtheit der DGL $\dot{v} = -kv + g$ ist dann wie oben

$$v(t) = \frac{g}{k} + C_1 e^{-kt}$$