

Wenn **ZWEI** eines **SECHS** - tetts gleichzeitig müssen ,
verbleibt ein **zauberhaftes** Quartett !



Kunst **I**st , ALLERL  zu ma Thema tisieren !

Peter Hammer chaosachso21@gmail.com

Felix Huber felix.68@gmx.ch

Rolf Knobel rolf.knobel@bluewin.ch

Armin Widmer widmer.ar@bluewin.ch

Rätsel des Monats $2 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 6 = 26$

EGOMETrie

Idee Peter Hammer



Kennst du eine attraktive Geometrie-Aufgabe mit der Lösung 26 ?

KI : «Hier ist eine Geometrieaufgabe mit **26** als Lösung. Ein Rechteck hat eine Länge von 10 und eine Breite von 3. Berechne den Umfang des Rechtecks !

$$u = 2 \cdot (10 + 3) = 26$$

Falls du mit «**Lösung 26**» etwas anderes meinst – zum Beispiel Aufgabe **Nr. 26** aus einem Schulbuch – sende mir bitte die Aufgabenstellung oder ein Foto.»

Bitte etwas Anspruchsvolleres !

KI : «Hier ist eine anspruchsvollere Geometrieaufgabe mit der **Lösung 26**.
Ein rechtwinkliges Dreieck hat Katheten mit der Länge 10 und 24.
Berechne die Länge der Hypotenuse !

$$c = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$$

Und passend zentriert misst der Winkel rund 22.62 Grad ! Aber bitte ...

<https://www.omnicalculator.com/de/mathematik/hypotenuse>

KI : «Noch etwas anspruchsvoller ? – Gerne :
Ein Kreis hat einen Umfang von 52π .
Berechne den Radius des Kreises !

$$u = 2r\pi = 52\pi \Rightarrow r = 26$$



GEO-metrie mit KI zu betreiben, ist aus unserer Sicht eine ART von **EGO**-metrie. Umso erfreulicher ist es, wenn sich **KI** – allerdings mittlerweile eher selten – irrt !

KI : «Hier ist eine deutlich anspruchsvollere Geometrieaufgabe, deren Ergebnis erneut **26** ergibt. Ein gleichschenkliges Trapez hat Parallelen mit den Grössen 40 (a) und 14 (c). Die Höhe beträgt 24. Berechne den Schenkel b !

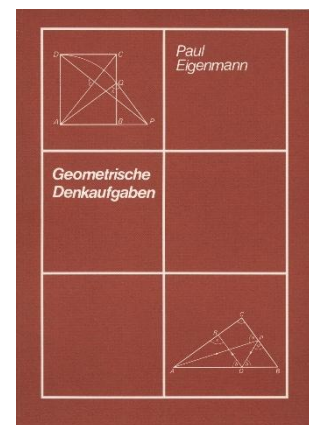
Lösung : ... $b^2 = 169 + 576 = 745$

Moment – das ergibt ja nicht **b = 26** ! Wir prüfen nochmals ... »

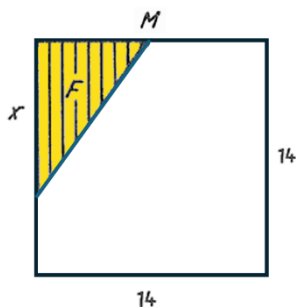
Frage Ein gleichschenkliges Trapez mit dem Schenkel **b = 26** und der Decklinie c = 14 hat eine Höhe h = 24. Berechne die Grundseite a !

Eine Alternative zu **KI** ist, im Stil der guten alten Zeit im ideenreichen Büchlein «Geometrische Denkaufgaben» von Paul Eigenmann eine Aufgabe zu suchen mit der **Lösung 26**. **K** ein **I**nteresse ? Das können wir nachvollziehen, denn keine der insgesamt 293 Aufgaben hat die **Lösung 26** ?

So bleibt uns wohl nichts anderes übrig, als die **Nummer 26** ins Rampenlicht zu stellen und diese so zu manipulieren, dass als Lösung die **Zahl 26** erscheinen wird ?



Frage Wie sind die Werte der Quadratseite (14) und des Stammbruches (1 / 7) zu manipulieren, um als Lösung **x = 26** zu erhalten ?



$$F = \frac{1}{7} \text{ der Quadratfläche} \quad x = ? \quad \text{M: Mitte}$$

Es gibt ihn, der Pyramidenstumpf mit einem Volumen von **2026**. Aber inwiefern wird auch der Wunsch, dass die Höhe, die Grund- (a) und Deckkante (b) ganzzahlig sind, erfüllt ?



Frage Gibt es einen Pyramidenstumpf mit ganzzahligen a, b, h und V = **2026** ?

$$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = 2026 = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2) ; a, b, h \in \mathbb{N}$$

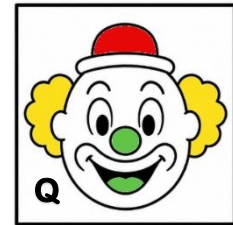
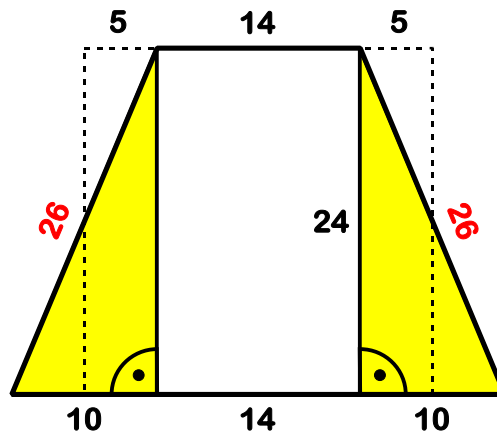
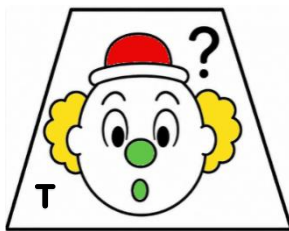
Lösungen Rätsel des Monats $2 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 6 = 26$

KI: « Lösung: ... $b^2 = 169 + 576 = 745$

Moment – das ergibt ja nicht **$b = 26$** ! Wir prüfen nochmals !

$$10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 \quad [Q = T = 576]$$

Also brauchen wir die Länge 10 anstatt 13 für die kleine Kathete. »

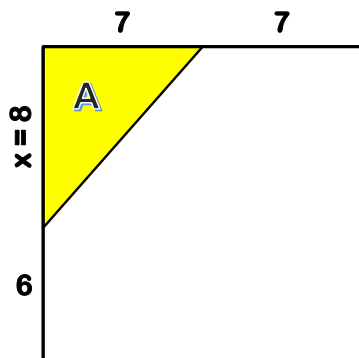


«Die erste Regel, an die man sich in der **Mathematik** halten muss, ist, **exakt** zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit **einfach**.»

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 – 1823) war ein Mathematiker, ein französischer Offizier und Politiker, dem wir unter anderem dieses Zitat verdanken und die Idee der Massen-Mobilisierung.



Carnot



Die Aufgabe **Nummer 26** bei den «Geometrischen Denkaufgaben» von Paul Eigenmann ist gewiss ganz nach dem Geschmack des Zitats von Carnot.

$$A = \frac{\text{Quadratfläche}}{7}, \quad s = 14, \quad x = ?$$

$$\frac{7x}{2} = \frac{14 \cdot 14}{7}, \quad 7x = 14 \cdot 2 \cdot 2, \quad \mathbf{x = 8}$$

Wenn wir fordern, dass $x = 26$ und die Beziehung der Flächeninhalte des Dreiecks und des Quadrates einem Stammbruch entspricht, sowie alle Werte ganzzahlig sein müssen, so steht die Exaktheit auf wackeligen Füßen.

$$A = \frac{\text{Quadratfläche}}{n = ?}, \quad s = ?, \quad x = 26; \quad \frac{1}{2} 26 \cdot \frac{s}{2} = \frac{s^2}{n} \Rightarrow 13n = 2s; \quad s \geq 26$$

n	4	6	8	10	26	2026
s	26	39	52	65	169	13'169

Und plötzlich taucht sie auf, die an den Haaren herbeigezogenen Parallelen wie beispielsweise die drei Endzahlen (169) für $n = 26$ und $n = 2'026$. Wenn wir nunmehr fordern – und zwar absichtlich erst hier – dass die Quadratseite die kleinste Zahl mit der **Quersumme 26** sein muss – so wird Lazare Nicolas Marguerite Carnot auf eine **Ma-Ma-Mo** (**M**athematik-**M**assen-**M**obilisierung) verzichten, da für $n = 292$ und damit $s = 1898$ ($1 + 8 + 9 + 8 = 26$) seine Maxime exakt und einfach erfüllt ist.

$$V_{PS} = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2) = 2026; \quad h \cdot (a^2 + ab + b^2) = 2 \cdot 3 \cdot 1'013 = 6'078$$

Die möglichen Teiler von 6'078 sind 1, 2, 3, 6, 1'013, 2'026, 3'039 und 6'078 – da 1'013 eine Primzahl ist. Somit kann $a^2 + ab + b^2$ nur einer dieser acht Werte sein.

Lemma : Jede Primzahl $P \equiv 2 \pmod{3}$, welche die Summe $a^2 + ab + b^2$ teilt, teilt die Summe sogar quadratisch (gerader Exponent).

Sowohl 2 als auch 1'012 sind von der Form $2 \pmod{3}$.

Deshalb können die Produkte 6, **2'026**, 3'039 und 6'078 – bei denen die Teiler 2 und 1'013 nicht quadratisch sind – nicht von der Form $a^2 + ab + b^2$ sein.

Schliesslich sind die Teiler 1, 2 und 3 wegen $a^2 + ab + b^2 \geq 7$ auszuschliessen !

Somit gibt es keinen Pyramidenstumpf mit $V = 2026$ und ganzzahligen a , b und h .

Armin Widmer: «ChatGPT und Gemini lösen diese Aufgabe ebenfalls mit der Zahlentheorie (quadratisches Reziprozitätsgesetz).»

Wer indes nichts von der «**EGO-Metrie**» hält, möge sich bis ins Jahr 2028 gedulden, denn dann lassen sich aufgrund der Fülle an Varianten die eine oder andere gewiss auch ohne Hilfsmittel (KI) finden ! Wie viele Varianten wird es im Jahr 2028 geben ?