

Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit vier Unbekannten

$$\left| \begin{array}{r} 6w - x + y = 12z - 5 \\ -2x - 8 = -6w + 8z - 2y \\ 2y = 4z - 3w + 5 \\ 3w = 9 + 4z + x \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$$

Zuerst ordnen:

$$\left| \begin{array}{r} 6w - x + y - 12z = -5 \\ 6w - 2x + 2y - 8z = 8 \\ 3w + 2y - 4z = 5 \\ 3w - x - 4z = 9 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$$

Man stellt zuerst ein 3-3-Gleichungssystem her (durch Elimination von x):

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{I} - \text{II}: & 12w - 6w - 2x + 2x + 2y - 2y - 24z + 8z = -10 - 8, \text{ also} \\ & 6w - 16z = -18 \text{ bzw. nach Division durch 2: } 3w - 8z = -9 \text{ (V)} \\ \text{I} - \text{IV}: & 6w - 3w - x + x + y - 12z + 4z = -5 - 9, \text{ also} \\ & 3w + y - 8z = -14 \text{ (VI)} \end{aligned}$$

Das 3-3-Gleichungssystem lautet daher:

$$\left| \begin{array}{r} 3w + 2y - 4z = 5 \\ 3w - 8z = -9 \\ 3w + y - 8z = -14 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{III} \\ \text{V} \\ \text{VI} \end{array}$$

Man stellt nun ein 2-2-Gleichungssystem her (durch Elimination von y):

$$\begin{aligned} \text{III} - 2 \cdot \text{VI}: & 3w - 6w + 2y - 2y - 4z + 16z = 5 + 28, \text{ also} \\ & -3w + 12z = 33 \text{ (VII)} \end{aligned}$$

Das 2-2-Gleichungssystem lautet daher:

$$\left| \begin{array}{r} 3w - 8z = -9 \\ -3w + 12z = 33 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{V} \\ \text{VII} \end{array}$$

Elimination der Variablen w liefert die Lösung für z:

$$\text{V} + \text{VII}: 4z = 24, \text{ also } \mathbf{z = 6}$$

Einsetzen von z in Gleichung V ergibt Lösung für w: $3w = 48 - 9 = 39$, also $\mathbf{w = 13}$

Einsetzen von z und w in Gleichung VI ergibt Lösung für y:

$$y = -3 \cdot 13 + 8 \cdot 6 - 14 = -5, \text{ also } \mathbf{y = -5}$$

Einsetzen von z und w in Gleichung IV ergibt Lösung für x:

$$x = 3 \cdot 13 - 4 \cdot 6 - 9 = -5, \text{ also } \mathbf{x = 6}$$

Also ist die Lösungsmenge $\mathbf{L = \{(13, 6, -5, 6)\}}$

Derartige Gleichungssysteme löst man systematischer (mit dem Computer) mit dem Gauss-Verfahren.