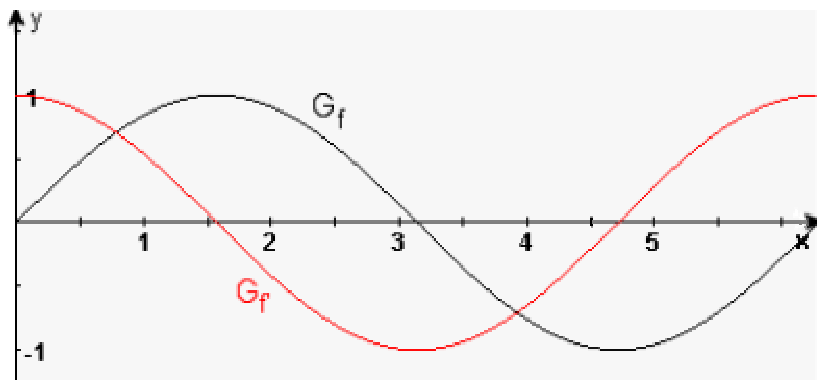


## Die Ableitungsfunktion der Sinus-Funktion

Gegeben:  $y = f(x) = \sin x$       Gesucht:  $f'(x) = ?$



Wie man durch Konstruktion von einigen Punkten von  $G_{f'}$  vermuten kann:

**Behauptung:**       $y = f(x) = \sin x$        $\rightarrow$        $f'(x) = \cos x$

**Beweis:** Es gilt von früher:

1)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$  (Additionstheorem 1. Art)

2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

3)  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha \rightarrow$  (mit  $\alpha = \frac{h}{2}$ )       $\cos h - 1 = -2\sin^2\frac{h}{2}$

Sei  $x_0$  fest:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x_0 (\cos h - 1)}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x_0 \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \right) \\ &= \sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\sin \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) + \cos x_0 = \sin x_0 \cdot 0 \cdot 1 + \cos x_0 = \cos x_0 \end{aligned}$$

Da  $x_0$  beliebig war, so gilt die Behauptung.

Bem.: Benützt man das Additionstheorem 2. Art für Sinus, nämlich

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

so wird die Herleitung einfacher!

Als Hausaufgabe!