

Aufgabe 2:

Diskutiere die Funktion mit Gleichung $y = f(x) = \frac{4x^3 + x^2 - x - 4}{x^2 - 4}$

$$y' = \frac{4x^4 - 47x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} \qquad y'' = \frac{30x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ b) Keine einfache Symmetrie ersichtlich, aber siehe c)
c) Asymptoten: $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ sind Polstellen (\rightarrow vertikalen Asymptoten)

$$\begin{aligned} \text{Verhalten: } f(x) &\rightarrow \infty \quad (x \rightarrow -2 \text{ und } x > -2) \\ f(x) &\rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow -2 \text{ und } x < -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 2 \text{ und } x > 2) \\ f(x) &\rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 2 \text{ und } x < 2) \end{aligned}$$

Polynomdivision für schiefe Asymptote:

$$(4x^3 + x^2 - x - 4) : (x^2 - 4) = 4x + 1 + \frac{15x}{x^2 - 4}$$

g: $y = 4x + 1$ ist Gleichung der schiefen Asymptote

Zusätzlich folgt: G_f ist symmetrisch zum Punkt $(0/1)$, denn G_h mit Gleichung

$$y = h(x) = 4x + \frac{15x}{x^2 - 4} \text{ w\u00e4re wegen } h(-x) = -h(x) \text{ punktsymmetrisch zu } (0/0).$$

- d) Nullstellen: $4x^3 + x^2 - x - 4 = 0$

Erraten: $x_2 = 1$

$$\text{Polynomdivision: } (4x^3 + x^2 - x - 4) : (x - 1) = 4x^2 + 5x + 4$$

$4x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow$ Wegen negativer Diskriminante keine weitere Nullstelle.

- e) Horizontaltangenten: $y' := 0$

biquadratische Gleichung $4x^4 - 47x^2 + 4 = 0$, Substitution $z = x^2$

$$z_{1,2} = \dots$$

$$x_3 \approx 3.4$$

$$x_4 \approx -3.4$$

$$x_5 \approx 0.29$$

$$x_6 \approx -0.29$$

$$y_3 \approx 21.4$$

$$y_4 \approx -19.4$$

$$y_5 \approx 1.05$$

$$y_6 \approx 0.95$$

(vergleiche Eigenschaft Punktsymmetrie von G_f !)

f) Extremal- und Wendestellen

$y''(x_3) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt $T_1(3.4 / 21.4)$

$y''(x_4) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt $H_1(-3.4 / -19.4)$

$y''(x_5) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt $H_2(0.29 / 1.05)$

$y''(x_6) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt $T_2(-0.29 / 0.95)$

$y'' := 0 : 30x(x^2 + 12) = 0 \quad x_7 = 0, y_7 = 1$

$W(0/1)$ muss Wendepunkt sein, da $y''(-\varepsilon) > 0$ und $y''(\varepsilon) < 0$

Nebenbei: Steigung der Wendetangente: $y'(0) = 0.25$

g) Graph

