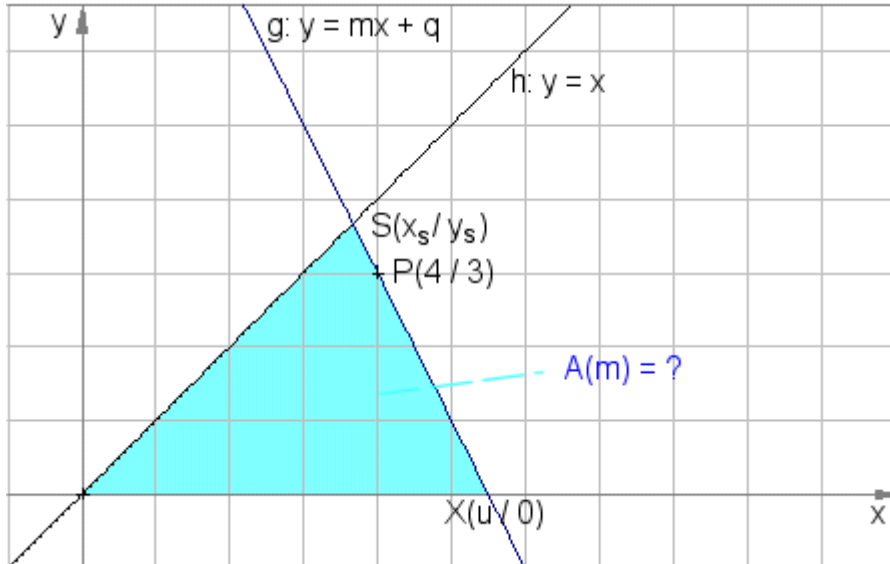


### Aufgabe 3:

Eine Gerade  $g$  mit Steigung  $m$  geht durch  $P(4/3)$ . Die Gerade  $g$ , die Gerade  $h: y = x$  und die  $x$ -Achse bestimmen ein Dreieck. Berechne den Inhalt  $A(m)$  dieses Dreiecks in Abhängigkeit von  $m$  und diskutiere die Funktion  $A(m)$ .



$$g: y = mx + q$$

$$\text{für } X(u/0) = g \cap x\text{-Achse: } y := 0 \rightarrow x = -\frac{q}{m} = u \quad \text{für } m \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{für } \{S(x_s/y_s)\} = g \cap h: \quad mx + q = x &\rightarrow x(m-1) = -q \\ &\rightarrow x_s = -\frac{q}{m-1} = y_s \quad \text{für } m \neq 1 \end{aligned}$$

$$P(4/3) \in g: \quad 3 = 4m + q \rightarrow q = 3 - 4m$$

$$\text{Also gilt: Inhalt } A(m) = \frac{|u \cdot x_s|}{2} = \frac{q^2}{2|m(m-1)|} = \frac{(3-4m)^2}{2|m(m-1)|} = \frac{(4m-3)^2}{2|m(m-1)|}$$

$$\text{Man betrachtet vorerst die Funktion mit Gleichung } y = f(m) = \frac{(4m-3)^2}{2m(m-1)}$$

$$y' = \frac{(4m-3)(2m-3)}{2m^2(m-1)^2} \quad y'' = -\frac{8m^3 - 27m^2 + 27m - 9}{m^3(m-1)^3}$$

a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

b) Keine einfache Symmetrie ersichtlich

c) Asymptoten: zwei vertikale Asymptoten mit Gleichung  $m = 0$  bzw.  $m = 1$ .

$$\text{Verhalten: } f(m) \rightarrow -\infty \quad (m \rightarrow 0 \text{ und } m > 0)$$

$$f(m) \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow 0 \text{ und } m < 0)$$

$$f(m) \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow 1 \text{ und } m > 1)$$

$$f(m) \rightarrow -\infty \quad (m \rightarrow 1 \text{ und } m < 1)$$

Die Gerade mit Gleichung  $y = 8$  ist horizontale Asymptote.

d) Nullstellen:  $(4m - 3)^2 = 0 \rightarrow m_1 = 0.75$  ist zweifache Nullstelle

e) Horizontaltangenten:  $y' := 0$

$$m_1 = 0.75 \quad m_2 = 1.5$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 6$$

f) Extremal- und Wendestellen

$y''(m_1) < 0 \rightarrow$  Hochpunkt  $H(0.75 / 0)$

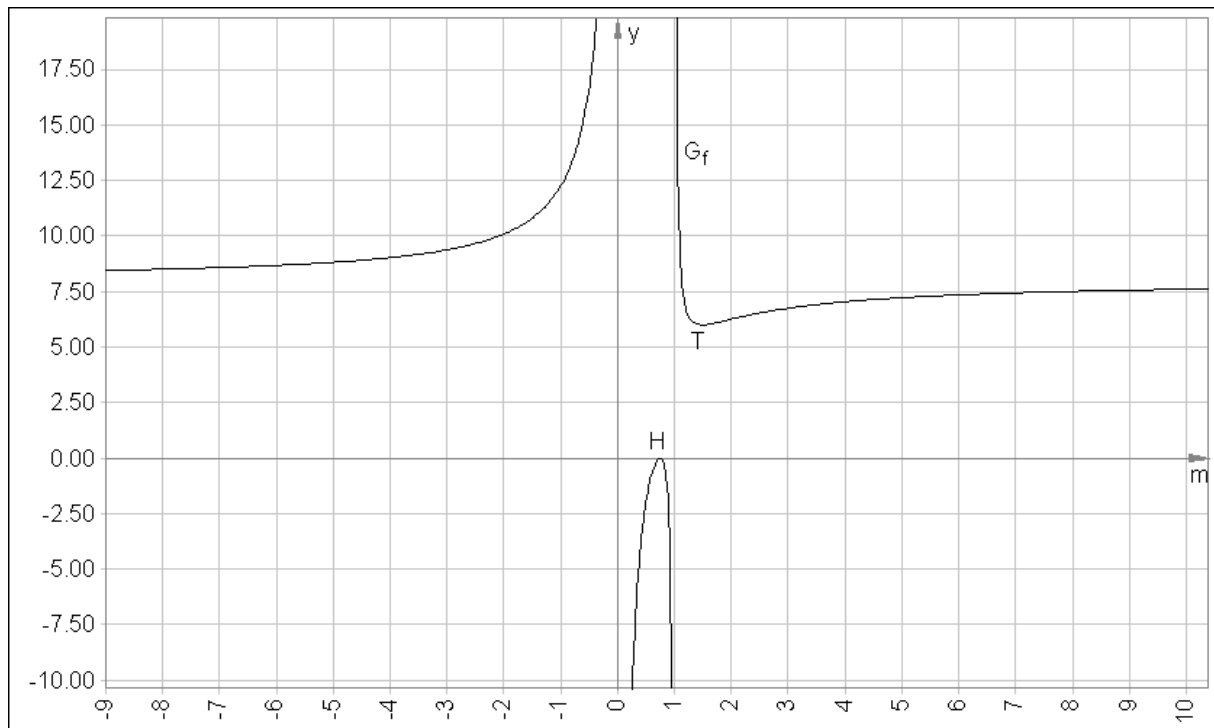
$y''(m_2) > 0 \rightarrow$  Tiefpunkt  $T(1.5 / 6)$

$$y'' := 0 : \quad 8m^3 - 27m^2 + 27m - 9 = 0$$

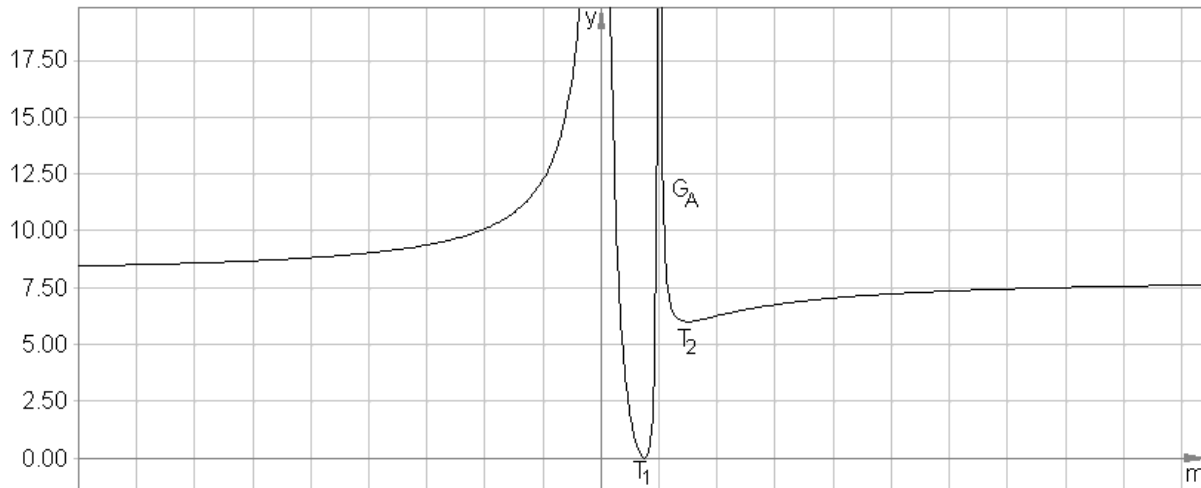
$$\rightarrow (\text{Taschenrechner}) \quad m_3 \approx 1.9259, \quad y_3 \approx 6.2034$$

$W(1.9259 / 6.2034)$  ist Wendepunkt ( rechts von T und wegen horizontaler Asymptote)

g) Graph



Geht man nun über zur Funktion mit Gleichung  $y = A(m) = \frac{(4m-3)^2}{2|m(m-1)|}$ , so wird derjenige Teil vom Graphen von  $f$ , der unterhalb der  $x$ -Achse liegt, nach oben geklappt:  $H$  wird dann zu  $T_1$ ,  $T$  wird dann zu  $T_2$ .



Der Inhalt des 'Dreiecks' wird also minimal für  $m = 0.75$ , nämlich  $A = 0$ . Es handelt sich dann allerdings nicht um ein echtes Dreieck, sondern um den Punkt  $(0/0)$ . Die Gerade  $g$  geht dann durch den Ursprung.

Ein relatives Minimum entsteht bei  $m = 1.5$ , nämlich  $A = 6$ . (Tiefpunkt  $T_2$ )

Für  $m = 0$  ist  $g \parallel x$ -Achse, für  $m = 1$  ist  $g \parallel h$ ; es entsteht in beiden Fällen kein Dreieck.

$A(m) \rightarrow \infty$  ( $m \rightarrow 0$  und  $m \rightarrow 1$ )

$A(m) \rightarrow 8$  ( $m \rightarrow -\infty$  und  $m \rightarrow \infty$ )