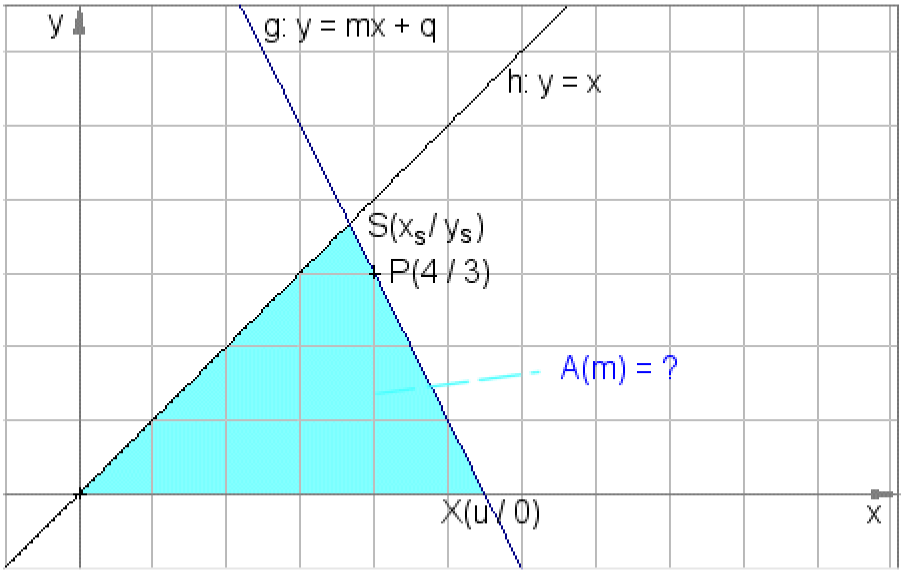
Aufgabe 3:

Eine Gerade g mit Steigung m geht durch P(4/3). Die Gerade g, die Gerade h: y = x und die x-Achse bestimmen ein Dreieck. Berechne den Inhalt A(m) dieses Dreiecks in Abhängigkeit von m und diskutiere die Funktion A(m).



g: y = mx + q

für X(u/0) = g ∩ x-Achse: y :=0 → $x = -\dfrac{q}{m} = u$ für m ≠ 0

für {S(x_s/y_s)} = g ∩ h: mx + q = x → x (m – 1) = -q

→ $x_s = -\dfrac{q}{m-1} = y_s$ für m ≠ 1

P(4/3) ∈ g: 3 = 4m + q → q = 3 – 4m

Also gilt: Inhalt $A(m) = \dfrac{|u \cdot x_S|}{2} = \dfrac{q^2}{2|m(m-1)|} = \dfrac{(3-4m)^2}{2|m(m-1)|} = \dfrac{(4m-3)^2}{2|m(m-1)|}$

Man betrachtet vorerst die Funktion mit Gleichung $y = f(m) = \dfrac{(4m-3)^2}{2m(m-1)}$

$y' = \dfrac{(4m-3)(2m-3)}{2m^2(m-1)^2}$ $y'' = -\dfrac{8m^3 - 27m^2 + 27m - 9}{m^3(m-1)^3}$

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ b) Keine einfache Symmetrie ersichtlich

c) Asymptoten: zwei vertikale Asymptoten mit Gleichung m = 0 bzw. m = 1.

Verhalten: f(m) → - ∞ (m → 0 und m>0)
f(m) → ∞ (m → 0 und m<0)

$f(m) \to \infty \quad (m \to 1 \text{ und } m>1)$
$f(m) \to -\infty \quad (m \to 1 \text{ und } m<1)$

Die Gerade mit Gleichung $y = 8$ ist horizontale Asymptote.

d) Nullstellen: $(4m - 3)^2 = 0 \;\to\; m_1 = 0.75$ ist zweifache Nullstelle

e) Horizontaltangenten: $y' := 0$

$m_1 = 0.75 \qquad m_2 = 1.5$
$y_1 = 0 \qquad y_2 = 6$

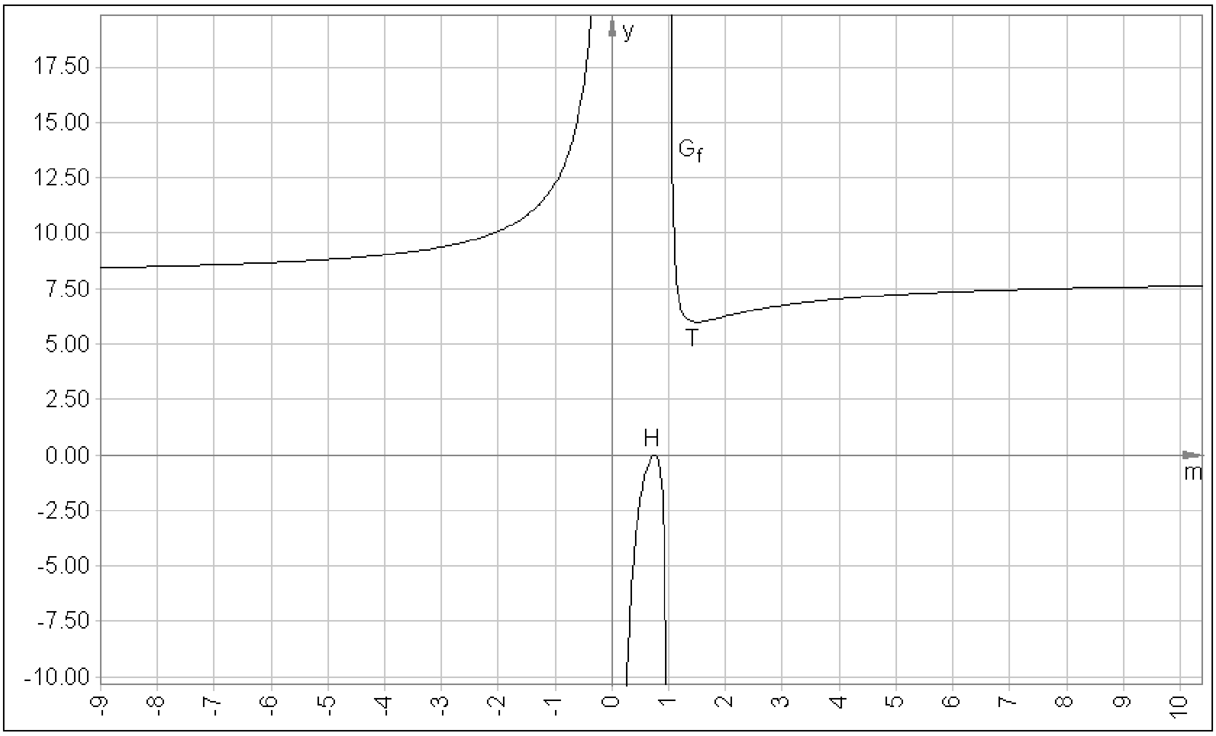
f) Extremal- und Wendestellen

$y''(m_1) < 0 \;\to\;$ Hochpunkt $H(0.75 / 0)$
$y''(m_2) > 0 \;\to\;$ Tiefpunkt $T(1.5 / 6)$

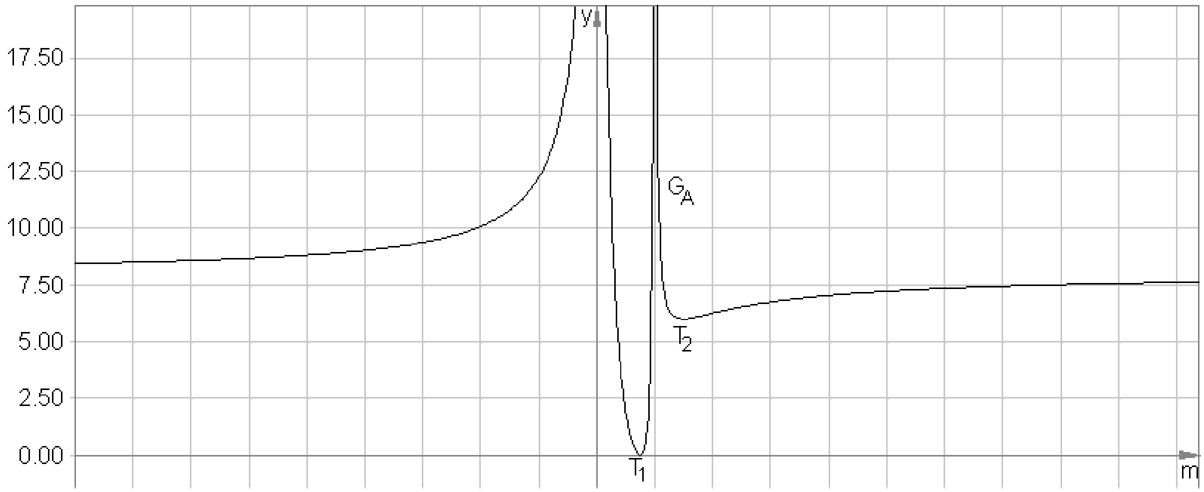
$y'' := 0 : \quad 8m^3 - 27m^2 + 27m - 9 = 0$
$\to$ (Taschenrechner) $\qquad m_3 \approx 1.9259, \; y_3 \approx 6.2034$

W(1.9259/ 6.2034) ist Wendepunkt (rechts von T und wegen horizontaler Asymptote)

g) Graph



Geht man nun über zur Funktion mit Gleichung $y = A(m) = \dfrac{(4m-3)^2}{2\left|m(m-1)\right|}$, so wird derjenige Teil vom Graphen von f, der unterhalb der x-Achse liegt, nach oben geklappt: H wird dann zu T_1, T wird dann zu T_2 .



Der Inhalt des 'Dreiecks' wird also minimal für m = 0.75, nämlich A = 0. Es handelt sich dann allerdings nicht um ein echtes Dreieck, sondern um den Punkt (0/0). Die Gerade g geht dann durch den Ursprung.
Ein relatives Minimum entsteht bei m = 1.5, nämlich A = 6. (Tiefpunkt T_2)

Für m = 0 ist g // x-Achse, für m = 1 ist g // h; es entsteht in beiden Fällen kein Dreieck.
$A(m) \to \infty$ $(m \to 0$ und $m \to 1)$

$A(m) \to 8$ $(m \to -\infty$ und $m \to \infty)$