Lösung Optimierungsaufgabe Nr. 100

Einer Halbkugel vom Radius $r = 6$ cm ist der gerade Kreiszylinder mit maximaler Mantelfläche einzubeschreiben. Wie hoch ist dieser Zylinder?

Lösung: Es gibt zwei Situationen:

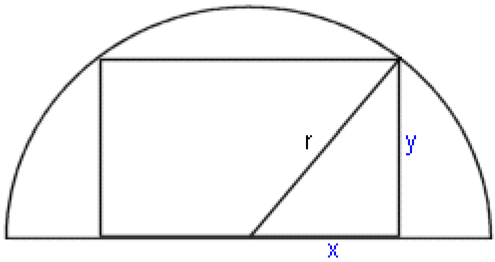
1. Zylinder steht auf Halbkreisfläche

   Zylinderradius x, Zylinderhöhe y

2. Zylinder liegt auf Halbkreisfläche

   Zylinderradius 0.5y, Zylinderhöhe 2x

Diagonalschnitt für beide Situationen: $0 < x < r$, $0 < y < r$



Zielfunktion: $M(x,y) = 2\pi\, x\, y$ (1. Situation); $M(x,y) = 2\pi \cdot 0.5y \cdot 2x = 2\pi\, x\, y$ maximal (2. Situation)

Nebenbedingung NB: $x^2 + y^2 = r^2$

In beiden Situationen gilt dieselbe Zielfunktion unter derselben Nebenbedingung.

Aus NB: $y^2 = r^2 - x^2$ Einsetzen in Quadratur von M:

$M^2(x) = 4\pi^2 x^2 (r^2 - x^2) = 4\pi^2 (x^2 r^2 - x^4)$ soll maximal werden.

$(M^2)'(x) = 4\pi^2 (2x\, r^2 - 4x^3) := 0 \rightarrow -2x(2x^2 - r^2) = 0$

$x = 0$ unbrauchbar, $x^2 = 0.5\, r^2$, also $\underline{\underline{x = \frac{r}{\sqrt{2}}}}$

Kontrolle: $(M^2)''(x) = 8\pi^2 (r^2 - 6x^2)$, daher $(M^2)''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) < 0$, also M für $\underline{\underline{x = \frac{r}{\sqrt{2}}}}$ maximal.

$y^2 = r^2 - x^2 = 0.5\, r^2$, also $y = x$.

Antwort:

1. Situation: Höhe $y = \underline{\underline{\frac{r}{\sqrt{2}}}} = 3\sqrt{2}$ cm

2. Situation: Höhe $2x = r\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm