

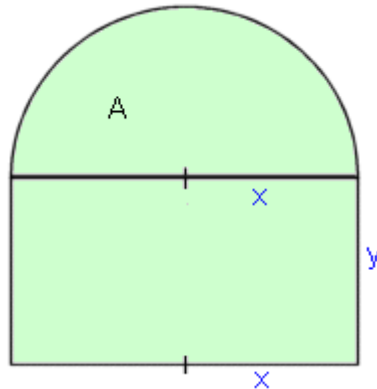
Lösung Optimierungsaufgabe Nr. 111

Der Querschnitt eines Strassentunnels ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis und dem Flächeninhalt $A = 50 \text{ m}^2$. Der Querschnitt soll minimalen Umfang haben. Wie breit ist dieser Tunnel?

Lösung:

Halbkreisradius $x \text{ m}$, Breite $2x \text{ m}$ des Rechtecks, Höhe $y \text{ m}$ des Rechtecks

Schnitt: $0 < x$, $0 < y$



Zielfunktion: $u(x,y) = 2x + 2y + \pi x$ soll minimal werden

Nebenbedingung NB: $A = 2xy + 0.5x^2\pi = 50$

Aus NB: $4xy = 100 - x^2\pi$, also $y = \frac{25}{x} - 0.25\pi x$

$u(x) = 2x + \frac{50}{x} - 0.5\pi x + \pi x = 2x + \frac{50}{x} + 0.5\pi x$ soll minimal werden.

$u'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} + 0.5\pi := 0 \rightarrow x^2 = 100 / (4 + \pi)$

$x < 0$ unbrauchbar, also $x = \sqrt{\frac{100}{4 + \pi}} \approx 3.74$

Kontrolle: $u''(x) = \frac{100}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$, also u für $x = \underline{\underline{\sqrt{\frac{100}{4 + \pi}}}}$ minimal.

$y^2 = r^2 - x^2 = 0.5r^2$, also $y = x$.

Antwort:

Die Breite des Tunnels beträgt $2x \text{ m} = 2 \sqrt{\frac{100}{4 + \pi}} \text{ m} \approx 7.48 \text{ m}$