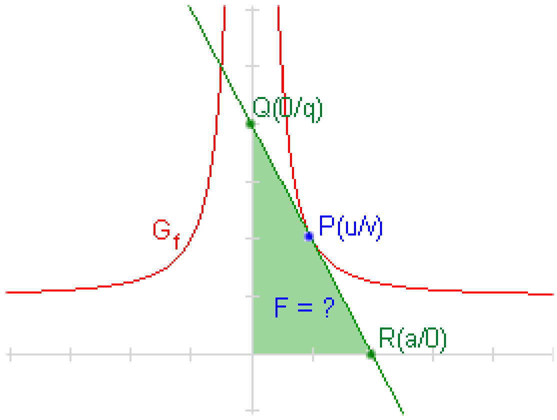
Lösung Repetitionsaufgabe Nr. 133

a) Diskutiere die Kurve mit Gleichung y = $\frac{x^2+1}{x^2}$

b) Im Punkt P(u/v), der im I.Quadranten liegt, wird die Tangente an die Kurve gelegt.
Die Tangente schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten Q und R.
Bestimme den Punkt P so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OQR minimal wird.

c) Berechne den Inhalt des Dreiecks OQR.



Lösung:

a) $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -2x^{-3}$, $f''(x) = 6x^{-4}$

G_f ist also die um 1 nach oben verschobene Hyperbel mit Gleichung $y = \frac{1}{x^2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, G_f ist symmetrisch zur y-Achse
y-Achse ist vertikale Asymptote, g: y = 1 ist horizontale Asymptote
Keine Nullstellen, keine Horizontaltangenten, keine Extremal- und Wendepunkte

b) c) Zielfunktion: Inhalt Dreieck: F(a,q) = 0.5 aq   soll minimal werden.

Nebenbedingungen: a und q in Abhängigkeit von u:

Tangente t: y = mx + q   mit $m = f'(u) = -2u^{-3}$
t: $y = -2u^{-3}x + q$

$P(u/1+\frac{1}{u^2}) \in t$: $1+\frac{1}{u^2} = -2u^{-3} \cdot u + q \;\rightarrow\; q = 1 + \frac{3}{u^2}$

t: $y = -2u^{-3}x + \frac{u^2+3}{u^2}$

A(a/0) = t $\cap$ x-Achse: $0 = -2u^{-3} \cdot a + 1 + \frac{3}{u^2}$

$$a = \frac{u^2+3}{u^2} \cdot \frac{u^3}{2} = \underline{\frac{u(u^2+3)}{2}}$$ (u > 0 nach Voraussetzung)

Zielfunktion $F(u) = \frac{1}{4}\frac{(3+u^2)^2}{u}$ soll minimal werden. (wie in Aufgabe 126)

$F'(u) = \frac{1}{4}\frac{2(3+u^2)\cdot 2u\cdot u-(3+u^2)^2\cdot 1}{u^2} = \frac{1}{4}\frac{(3+u^2)(4u^2-3-u^2)}{u^2} := 0$

$(3 + u^2)\,3\,(u^2 - 1) = 0$, also $\underline{u = 1}$, da $u > 0$

Kontrolle: $F'(1-\varepsilon) < 0$, $F'(1+\varepsilon) > 0$, also F für $\underline{u = 1}$ minimal.

Antwort:

Der Inhalt des Dreiecks wird für $\underline{\mathbf{u = 1}}$ minimal, nämlich $\underline{\mathbf{F(1) = 4}}$.