

## Lösungen Matura 2002, Grundlagenfach, KSR

### Nr. 1

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{3(x-2)^2} \quad y'' = f''(x) \quad (\text{s. Aufgabenblatt})$$

- a) Nullstelle:  $x^3 - 27x + 54 = 0 \quad x_1 = 3$   
 Polynomdivision:  $(x^3 - 27x + 54) : (x - 3) = x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x + 6)$   
 $x_1$  ist also zweifache Nullstelle,  $x_2 = -6$

Asymptoten: **g:  $x = 2$**  (vertikale Asymptote); keine schiefe Asymptote

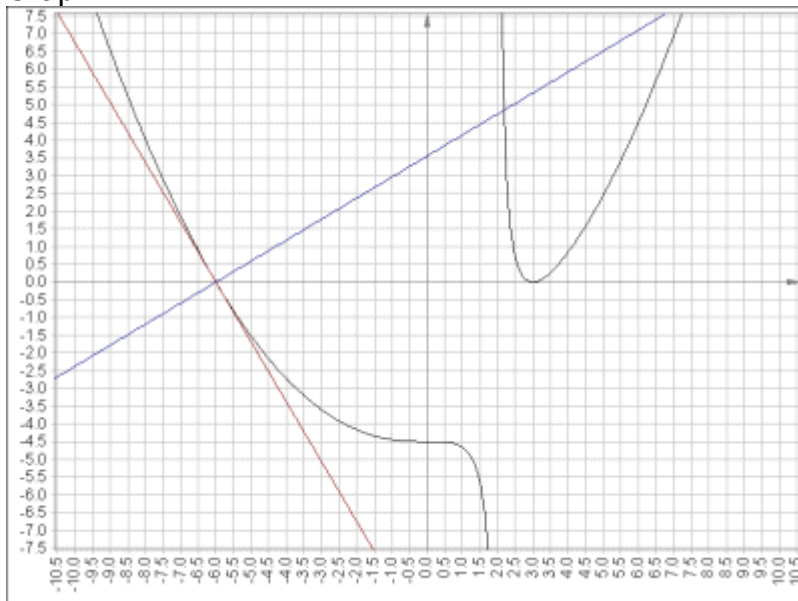
Extremalpunkte:  $y' = 0$

$$\begin{array}{ll} x_3 = 0 \text{ (zweifach)} & x_1 = 3 \\ y_3 = -4.5 & y_1 = 0 \end{array}$$

$f''(0) = 0$ , also cand Wendepunkt:  $f''(-\varepsilon) > 0, f''(\varepsilon) < 0$   
**W(0/-4.5) ist Wendepunkt (sogar Terrassenpunkt)**

$f''(3) > 0$ , also **T(3/0) Tiefpunkt**

- b) Graph:



- c) N(-6/0)

$$f'(-6) = \text{Steigung } m_t \text{ der Tangente} = \frac{-27}{16} \rightarrow \text{Steigung } m_n \text{ der Normalen} = \frac{16}{27}$$

$$t: y = \frac{-27}{16}x + q_t, N \in t \rightarrow t: y = \frac{-27}{16}x - \frac{81}{8}$$

$$n: y = \frac{16}{27}x + q_n, N \in n \rightarrow n: y = \frac{16}{27}x + \frac{32}{9}$$

$$\text{Flächeninhalt Dreieck} = \frac{6}{2} \left( \frac{81}{8} + \frac{32}{9} \right) = \frac{985}{24} \approx 41.04$$

## Nr. 2

a) Ebene  $E = (ABC)$ :  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Elimination von  $s$  und  $t$ :  **$E: 2x - 6y + 5z + 22 = 0$**

$g = (CD)$ :  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)  $D(1/4/0) \in E$ , denn  $2 - 24 + 0 + 22 = 0$

Beh.: Viereck ABCD ist Parallelogramm

Beweis:  $\vec{AB} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{DC} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha = \text{Winkel}(\vec{AB}, \vec{AD})$ :  $\cos \alpha = \dots \rightarrow \alpha \approx 63.61^\circ$

c)  $P \in g$ :  $P(1 + t / 4 + 2t / 2t)$

Dreieck ABP rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P:  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$

$$\begin{pmatrix} -2+t \\ 1+2t \\ 2+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4+t \\ -3+2t \\ -2+2t \end{pmatrix} = 0, \text{ also } 9t^2 - 10t + 1 = (9t-1)(t-1) = 0$$

$t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{1}{9}$ , daher  $P_1(2/6/2)$ ,  $P_2(\frac{10}{9} / \frac{38}{9} / \frac{2}{9})$

d)  $\sin \alpha = \frac{h_{AB}}{|\vec{AD}|}$ , also  $h_{AB} = |\vec{AD}| \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{65}}{3} \approx 2.687$

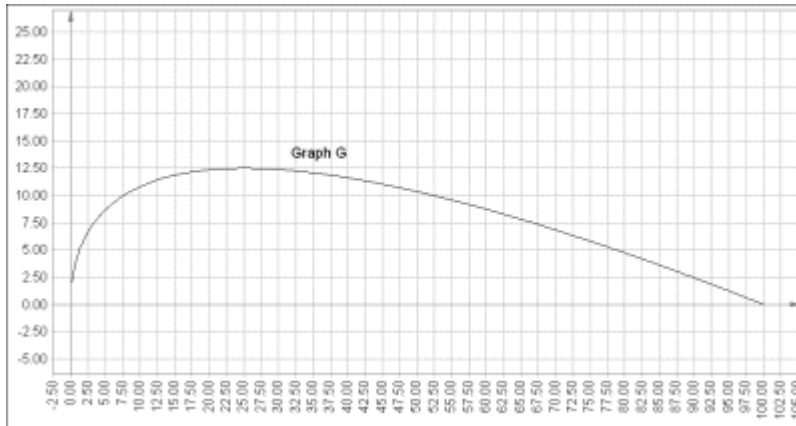
Flächeninhalt  $F$  des Parallelogramms =  $|\vec{AB}| \cdot h_{AB} = 2\sqrt{65} \approx 16.1245$

## Nr. 3

$f(x) = a\sqrt{x} - bx$   $a, b > 0$

Nullstellen:  $a\sqrt{x} = bx$ ,  $x_1 = 0$ ,  $\sqrt{x} = \frac{a}{b}$ ,  $x_2 = \frac{a^2}{b^2}$

a)  $a = 5$ ,  $b = 0.5$   $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 100$



Tangenten: (bei 0 ist eigentlich  $f$  nicht differenzierbar)  $t_1: x = 0$  (y-Achse)

Bei 100:  $f'(x) = 0.5ax^{-0.5} - b$ ,  $f'(100) = m_t = -0.25$

$(100/0) \in t \rightarrow t: y = -0.25x + 25$

Durchmesser ist beim Hochpunkt am grössten (vgl c) Länge ist nicht Durchmesser!)

$$f'(x) = 0: ax^{-0.5} = 2b, \text{ daher } x = \frac{a^2}{4b^2} = 25$$

**Durchmesser** =  $2(5 \cdot 5 - 0.5 \cdot 25) = 25$

b) Volumen  $V_{\text{Rot}} = \pi \int_0^{100} (5\sqrt{x} - 0.5x)^2 dx = \pi \left[ 25 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - 2x^{2.5} \right]_0^{100} = \frac{25000\pi}{3}$

c) Länge = 81, Durchmesser = 27

$$x_2 = 81 = \frac{a^2}{b^2} \quad 27 = 2 \left( a \sqrt{\left( \frac{a}{2b} \right)^2} - b \frac{a^2}{4b^2} \right) = \frac{a^2}{2b}$$

**b =  $\frac{2}{3}$ , a = 6**

d)  $b = \frac{2}{3}$  Behauptung: Durchmesser =  $\frac{1}{3}$  Länge (unabhängig von a)

Beweis:  $x_2 = \frac{a^2}{b^2} = \text{Länge} = \frac{9a^2}{4}$

Durchmesser an Stelle  $x = \frac{a^2}{4b^2} = \frac{9a^2}{16}$  :

Durchmesser =  $2 \left( a \frac{3a}{4} - \frac{2}{3} \frac{9a^2}{16} \right) = \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{3} \text{ Länge}$

#### Nr. 4

16 Felder: 7-mal 0, 4-mal 1, 3-mal 2 und 2-mal 3

$$a) P(A) = P(1,1) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$$

$$P(B) = P(\text{mindestens ein Feld 0}) = 1 - P(\text{kein Feld 0}) = 1 - \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{7}{10}$$

b)  $p(\text{keine Null}) = 0.3$  (s. bei a))

$$10 \text{ Karten, 4 Gewinne: } P_{10}(4) = \binom{10}{4} 0.3^4 0.7^6 \approx 0.20$$

$$c) p(3,3) = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{120} \quad \text{Man benötige } x \text{ Karten.}$$

$P(\text{in } x \text{ Karten mindestens ein Gewinn}) = 1 - P(\text{in } x \text{ Karten kein Gewinn}) > 0.5$

$$1 - \left(\frac{119}{120}\right)^x > 0.5 \quad \text{also} \quad x \ln \frac{119}{120} < \ln 0.5, \quad \text{also} \quad x > 82.83$$

Man muss **83** Karten kaufen.

d) Zufallsvariable X: Gewinn

X	0	1	5	10	30
p(x)	0.7	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$

$$\text{Erwartungswert } \mu = E(X) = \frac{13}{60} + \frac{5}{20} + \frac{10}{40} + \frac{30}{120} = \frac{29}{30} \quad (\text{in Franken})$$

#### Nr. 5

$$a) f(x) = x^2 e^x, \quad g(x) = 2 e^x$$

$$\text{Schnitt: } x^2 e^x = 2 e^x, \quad \text{also} \quad x^2 = 2, \quad \text{somit} \quad x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}$$

$$\text{Inhalt } A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2e^x - x^2 e^x) dx = \left[ 2e^x - e^x(x^2 - 2x + 2) \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

(für Stammfunktion von  $x^2 e^x$ : s. Fosa, p.46, a=1, p(x)=x<sup>2</sup>)

$$A = -e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}}(2 + 2\sqrt{2}) \approx 4.581$$

b) Ebene E=(ABC): (Achsenabschnittsform)  $E: \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ , also

E:  $6x + 2y + 3z - 6 = 0$ , daher Normalenvektor  $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gerade  $g = (PQ)$  soll senkrecht auf E stehen, also ist ihr Richtungsvektor  $\vec{PQ}$  ein Vielfaches des Normalenvektors  $\vec{n}_E$ .

Da  $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7-p \\ q+1 \end{pmatrix}$ , so muss  $\vec{PQ} = 3 \cdot \vec{n}_E$  sein.

Also  $7 - p = 6$  und  $q + 1 = 9$ , daher  $p = 1$  und  $q = 8$ .

Gerade  $l_P$  senkrecht E durch P:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$l_P \cap E$ :  $-42 + 36t + 2 + 4t - 3 + 9t - 6 = 0$ , also  $t = 1$ . D.h. der Fusspunkt ist  $1 \cdot \vec{n}_E$  von P entfernt, also  $d(P,E) = |\vec{n}_E| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$ .

Analog für Q: ( $t = -2$ )  $d(Q,E) = 2|\vec{n}_E| = 2\sqrt{36 + 4 + 9} = 14$ .