

# Differentialgleichungen in der Physik: Vermischte Übungen

## Lösungen

### Aufgabe 1

a)  $m = 0.2\text{kg}$ ,  $F_{\text{Schub}} = 6\text{N}$ ,  $k = 0.1\text{Ns/m}$ ,  $t_B = 2.5\text{s}$

$$m \cdot \ddot{s} = F_{\text{Schub}} - F_G - k \cdot \dot{s}$$

$$m \cdot \dot{v} = F_{\text{Schub}} - F_G - k \cdot v$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m} \cdot v + \frac{F_{\text{Schub}}}{m} - g$$

Zahlen einsetzen (ohne Einheiten):  $\dot{v} = -0.5 \cdot v + 20$

Allgemeine Lösung homogene Glg.:  $v_H(t) = v^* \cdot e^{-0.5t}$  (Integrationskonstante  $v^*$ )

Partikuläre Lösung inhomogene Glg., Ansatz  $v = \text{konst.}$ :  $v_I = 40$

→ Allgemeine Lösung inhomogene Glg.:  $v(t) = v^* \cdot e^{-0.5t} + 40$

Anfangsbedingung:  $v(0) = 0 \rightarrow v^* = -40$

Lösungsfunktion:  $v(t) = 40 \cdot (1 - e^{-0.5t})$

$$\rightarrow v(2.5\text{s}) = 28.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow s(2.5\text{s}) = \int_0^{2.5} 40 \cdot (1 - e^{-0.5t}) dt = 42.9\text{m} \quad (\text{V-200})$$

b) Die Differentialgleichung für die weitere Bewegung (ohne Schub) lautet:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m} \cdot v - g \quad \text{bzw.} \quad \dot{v} = -0.5 \cdot v - 10$$

Allgemeine Lösung:  $v(t) = v^* \cdot e^{-0.5t} - 20$  (Integrationskonstante  $v^*$ , siehe oben)

Anfangsbedingung:  $v(0) = 28.5 \rightarrow v^* = 48.5$  (Neuer Zeitnullpunkt: Ende der Brenndauer)

Lösungsfunktion:  $v(t) = 48.5 \cdot e^{-0.5t} - 20$

Höchster Punkt wird erreicht, wenn  $v(t_h) = 0$ , also

$$0 = 48.5 \cdot e^{-0.5t_h} - 20 \rightarrow t_h = -2 \cdot \ln\left(\frac{20}{48.5}\right) = 1.77\text{s}$$

$$\rightarrow s(1.77\text{s}) = \int_0^{1.77} (48.5 \cdot e^{-0.5t} - 20) dt = 21.6\text{m} \quad (\text{V-200})$$

Die maximale Höhe ist also:  $s_{\text{max}} = 42.9\text{m} + 21.6\text{m} = 64.5\text{m}$

### Aufgabe 2

a)  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 6.32\text{s}^{-1}$ ;  $\delta = \frac{k}{2m} = 0.75\text{s}^{-1}$ ;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 6.28\text{s}^{-1}$ ;  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.00\text{s}$

b)  $e^{-\delta \cdot t} = \frac{1}{10} \rightarrow t = -\frac{1}{\delta} \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) = 3.07\text{s}$

c) Lösungsfunktion (gedämpfte Schwingung):

$$s(t) = (\hat{s}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{s}_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

$$\dot{s}(t) = -\delta \cdot (\hat{s}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \hat{s}_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{-\delta \cdot t} + (\omega \cdot \hat{s}_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega \cdot \hat{s}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

Anfangsbedingungen:  $s(0) = 0.08\text{m}$ ,  $v(0) = 0\text{m/s}$

$$\rightarrow \hat{s}_2 = 0.08\text{m}$$

$$\rightarrow 0 = -\delta \cdot \hat{s}_2 + \omega \cdot \hat{s}_1 \rightarrow \hat{s}_1 = \frac{\delta}{\omega} \cdot \hat{s}_2 = 0.00955\text{m}$$

In Lösungsfunktion einsetzen und für  $t = 3\text{s}$  auswerten:

$$s(3\text{s}) = 0.00842\text{m}$$

$$d) A = \frac{\hat{F}_A}{m} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\hat{s} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}} = 0.101\text{m}$$

### Aufgabe 3

a)

Wärme:  $\Delta Q = c_W \cdot m_W \cdot \Delta T \quad | \div \Delta t$

$$\rightarrow \dot{Q} = c_W \cdot m_W \cdot \dot{T}$$

Leistung:  $P = \dot{Q} = P_{\text{Heizung}} - P_{\text{Abkühlung}} = P_{\text{Heizung}} - k \cdot A \cdot (T - T_A)$

DGL für  $T(t)$ :  $c_W \cdot m_W \cdot \dot{T} = P_{\text{Heizung}} - k \cdot A \cdot (T - T_A)$

$$3200 \cdot \dot{T} = 800 - 2 \cdot (T - 20)$$

$$\dot{T} = -\frac{1}{1600} \cdot T + \frac{21}{80}$$

Allg. Lsg. H:  $T_H(t) = T^* \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$

Part. Lsg. I:  $T_I = 420$  (aus  $T = \text{konst.}$ ;  $\dot{T} = 0$ )

Allg. Lsg. I:  $T(t) = T^* \cdot e^{-\frac{t}{1600}} + 420$

Anfangsbed.:  $T(0) = 10 \rightarrow T^* = -410$

Lösungsfunktion:  $T(t) = 420 - 410 \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$

b)  $100 = 420 - 410 \cdot e^{-\frac{t}{1600}}$

$$\rightarrow t = -1600 \cdot \ln \frac{320}{410} = 397\text{s} \approx 400\text{s}$$