

Lösung der Aufgabe 1

$$y = f(x) = (4,5 - 8x^2) \cdot e^x$$

a) $D = \mathbb{R}$

$$y' = -16xe^x + (4,5 - 8x^2)e^x = e^x \cdot (4,5 - 16x - 8x^2)$$

$$y'' = (-16 - 16x)e^x + (4,5 - 16x - 8x^2)e^x = e^x \cdot (-11,5 - 32x - 8x^2)$$

Nullstelle: $y = 0 : x^2 = \frac{4,5}{8}; \quad x_1 = \frac{3}{4}; \quad x_2 = -\frac{3}{4}$

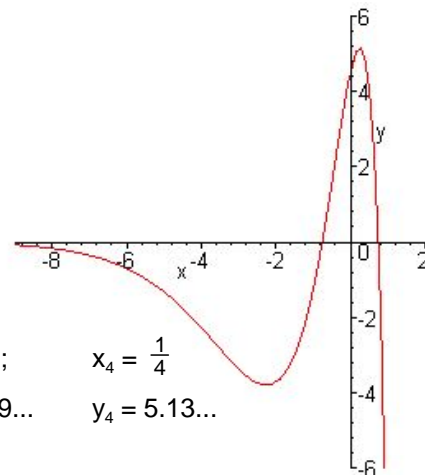
Asymptote: Grenzwert für $x \rightarrow -\infty : y = 0$ (x-Achse)

Extrema: $y' = 0 : 8x^2 + 16x - 4,5 = 0$

$$x_{3,4} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{16} = -1 \pm \frac{5}{4} \quad x_3 = -\frac{9}{4}; \quad x_4 = \frac{1}{4}$$

$$y_3 = -3,79... \quad y_4 = 5.13...$$

$f(x_3) > 0$ Tiefpunkt bei x_3
 $f(x_4) < 0$ Hochpunkt bei x_4



Graph gemäss TR mit Eintrag der Nullstellen und Extrempunkte mit Tangenten

b) $A = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} (4,5e^x - 8x^2e^x) dx = 4,75...$ Partielle Integration von $\int x^2e^x dx$ oder Lösung aus der DMK-Formelsammlung

Lösung der Aufgabe 2

60 Lose von 1 bis 60, 15 Lose mit Geschenkkorbgegn : $P(G) = \frac{1}{4}$;

10 Lose mit Radiogewinn : $P(R) = \frac{1}{6}$

a) $P(\text{beide Gewinne}) = P(12,24,36,48,60) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$

b) $P(\text{mindestens ein Gewinn}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

c) $P(R \cap R) = \frac{10}{60} \cdot \frac{9}{59} = 0,025...$

d) $P(\text{mindestens 2 G}) = P(2 G \cup 3 G) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-2} + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-3} = \frac{5}{32}$

e) Wahrscheinlichkeit, keinen Gewinn zu erhalten (vgl. b)) : $P(\text{kein Gewinn}) = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x < 0,01$; man erhält $x > 11,3...$

f) Erwartungswert : $\mu = E(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$

Lösung der Aufgabe 3

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 > 0$$

Substitution $z = \sin x$: $2z^2 + z - 1 = (2z-1)(z+1) > 0$
 $L_z = \mathbb{R} \setminus [-1, \frac{1}{2}]$

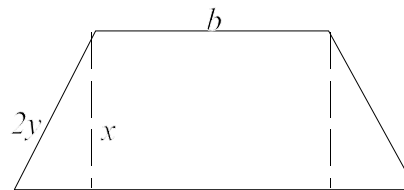
Für $\sin x < -1$ erhält man keine x-Werte

Für $\sin x < \frac{1}{2}$ und $\sin x \leq 1$ erhält man die Lösungsmenge $L =] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} [$

Lösung der Aufgabe 4

Höhe des Trapezes : x

Zielfunktion: Umfang des Trapezes $u = 2b + 6y$



Aus $A = 6 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3} = \frac{2y + 2b}{2} \cdot x = (y + b) \cdot x$ und aus dem Pythagoras im halben gleichschenkeligen Dreieck ; $x^2 = 3y^2$ ergibt sich $y = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{x} - \frac{x}{\sqrt{3}}$ und

$$u(x) = \frac{6x}{\sqrt{3}} + \frac{12\sqrt{3}}{x} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{4x}{\sqrt{3}} + \frac{12\sqrt{3}}{x}$$

$$u'(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{12\sqrt{3}}{x^2}$$

Die Gleichung $u'(x) = 0$ liefert als einzige sinnvolle Lösung $x = 3$.

Das Trapez hat eine Höhe von 3 m.

Lösung der Aufgabe 5

a) $y = f_p(x) = x^4 + wx^3 - 2px + p$
 $y' = 4x^3 + 6x^2 - 2p$
 $y'' = 12x^2 + 12x = 12 \cdot (x+1)$ $y''(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = -1$
 $y''' = 24x + 12$

Wendepunkte $W_1(0/p)$ $W_2(-1/-1+3p)$

b) $d^2(p) = 1 + (2p - 1)^2$ Parabel, nach oben geöffnet
 $[d^2(p)]' = 2(2p-1) \cdot 2$ die Nullstelle der 1. Ableitung liefert $p = \frac{1}{2}$

c) Tangente t in W_2 : $m = f'_p(0) = -2p$ $t: y = -2px + p$
 Schnittpunkt mit dem Graphen von f_p : $x^4 + 2x^3 - 2px = -2px$
 $x^3 \cdot (x+2) = 0$

Schnittpunkt $(-2/5p)$

$$A = \int_{-2}^0 (-2px + p - x^4 - 2x^3 + 2px - p) dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} \right]_{-2}^0 = 1,6$$

d) $p = 0$ $f_0(x) = x^4 + 2x^3 = x^3 \cdot (x+2)$ Nullstellen $x = 0$ und $x = -2$

$$V_{\text{rot}} = \pi \cdot \int_{-2}^0 (x^4 + 2x^3)^2 dx = \pi \cdot \int_{-2}^0 (x^8 + 4x^7 + 4x^6) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^9}{9} + 4 \cdot \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{7} \right]_{-2}^0 =$$

$$= \pi \cdot \left(0 + \frac{512}{9} - \frac{256}{2} + 4 \cdot \frac{128}{7} \right) = 6,38 \dots$$

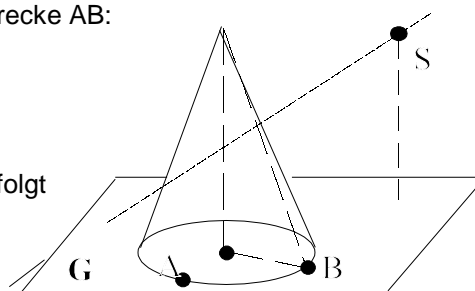
Lösung der Aufgabe 6

- a) Der Mittelpunkt liegt auf einer Mittelnormalebene zur Strecke AB:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \text{ Normalebene } N : 4x - y + z + D = 0.$$

Da der Mittelpunkt C(1/2/1) der Strecke AB auf N liegt, folgt
 $d = -3 : N : 4x - y + z - 3 = 0$

$$M = (g \cap N) : \quad 12 - 4t + 1 - 3t - 4 + 4t - 3 = 0, \text{ also} \\ 3t = 6 \text{ und } t = 2$$



b) $G = (ABM) : \vec{MA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{MB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Mit M als Anfangspunkt und diesen beiden Vektoren als Richtungsvektor erhält man die Parametergleichung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und daraus die Koordinatengleichung der KegelGrundebene G : $x + 2y - 2z - 3 = 0$

- c) Der Winkel zwischen der Mantellinie der Länge $\sqrt{45}$ und dem Kegelradius $|MB|=6$ ergibt sich aus $\cos \gamma = \frac{6}{\sqrt{45}} : \gamma = 26,5...^\circ$

- d) Die Spitze S hat die Koordinaten $0/y_s/0$.

Die Höhe des geraden Kreiskegels beträgt nach Pythagoras $\sqrt{45 - 36} = 3$, die Höhe des schiefen Kreiskegels ist doppelt so gross, also 6.

Die Normale zur Kegel-Grundkreisebene G durch S ist $\vec{n} : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_s \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; da der Schnittpunkt A dieser Geraden mit der Grundebene mit der Kegel-Grundkreisebene G gleich der Kegelhöhe $h = 6$ ist, erhält man diesen Schnittpunkt A für $t = \pm 2$ (der Normalenvektor hat die

Länge 3) : Für $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ y_s + 4 \\ -4 \end{pmatrix} \in G$ erhält man:

$$2 + 2(y_s + 4) - 2 \cdot (-4) - 3 = 15 + 2y_s = 0, \text{ also ist } y_s = -7,5; \text{ für } \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -2 \\ y_s - 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich:}$$

$$-2 + 2(y_s - 4) - 2 \cdot 4 - 3 = -21 + 2y_s = 0, \text{ also ist } y_s = 10,5 \text{ (nur eine Lösung verlangt).}$$