

M a t h e m a t i k

Typus C

*Bemerkungen :*

Zeit : Drei Stunden

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet.

Für 40 Punkte wird die Note 6 erteilt.

1. Eine Kurve ist für  $x \neq 0$  durch die Gleichung  $y^2 = x^3 \cdot (1 - x^2)$  gegeben.
- Bestimme die Extrempunkte und die Wendestellen und zeichne den Graphen der Kurve (Einheit 10 cm).
  - Rotiert man die Kurve um die x-Achse, so beschreibt die Kurve für  $x \neq 0$  einen tropfenförmigen Körper. Durch welchen Punkt der positiven x-Achse muss eine zu dieser Achse normale Ebene gelegt werden, damit das Volumen des Körpers in zwei gleich grosse Hälften zerfällt ?

2. Eine Abbildung der komplexen Ebene  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  auf sich wird beschrieben durch

$$z \rightarrow w = f(z) = z^2 + iz$$

- Konstruiere für  $z_1 = 2 + i$  den zugehörigen Bildpunkt  $w_1$
- Es seien  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$ ; stelle die Abbildung  $f$  in kartesischer Form dar :  
 $f: (x,y) \rightarrow (u,v)$  .
- Bestimme das Bild  $f(g)$  der Geraden  $g: y = \frac{1}{2}x - 1$  unter  $f$ ; die Gleichung der Bildkurve ist in Koordinatenform anzugeben.
- Die Bildkurve ist durch eine (homogene) Ursprungs-Affinität  $A$ :  
 $(u,v) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  in die Normalparabel  $\bar{v} = \bar{u}^2$  überzuführen. Notiere die Abbildungsgleichungen.  
Um welchen Kurventyp handelt es sich bei  $f(g)$ ?

3. Zwei unabhängige Testverfahren seien in der Lage, ein Grippe-Virus, das erfahrungsgemäss in 10 % aller Blutproben vorhanden ist, im Blut nachzuweisen. Bei vorhandenem Virus (viruspositivem Blut) gibt der Test A 70 % richtige Resultate, bei nichtvorhandenem Virus sind es 90%. Der Test B erkennt zu 90 % den vorhandenen Virus und macht in 80% der Fälle bei nicht vorhandenem eine richtige Aussage.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test A bei einer Blutprobe ein richtiges Resultat liefert?
  - Was ist die Wahrscheinlichkeit eines falschen Resultates beim Test B?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den durch A richtig getesteten Proben eine Blutprobe viruspositiv ist?
  - Eine Blutprobe wird mit A getestet. Ist der Test negativ, so wird auf virusnegativ entschieden, ist er positiv, so wird noch der Test B durchgeführt und anhand dieses Testes entschieden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit eines richtigen Entscheides?
4. Im euklidischen Raum sind eine Kugel  $K$  mit Mittelpunkt  $M(0/0/0)$  und Radius  $R = 9$  sowie drei Punkte  $A(3/6/0)$ ,  $B(-3/0/0)$  und  $C(1/3/-2)$  bekannt.
- Bestimme die Ebene (ABC) und berechne die Fläche des Dreiecks ABC.
  - Suche den Punkt D auf der Kugeloberfläche, der das Volumen der Pyramide ABCD maximal macht. Berechne dieses Volumen und gib die zugehörige Pyramidenhöhe an.
  - Durch die im Innern der Kugel liegenden Punkte A und B ist die grösstmögliche Kugel zu bestimmen, die K von innen berührt. Beachte: A, B und M liegen in einer Hauptebene.

#### 5. Kurzaufgaben

- Berechne  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - x} dx$
- Bestimme die Ableitungen  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ ,  $f''''$  und  $f^{(n)}$  der Funktion  $x \rightarrow f(x) = \ln(x + 1)$ . Beweise die Formel für die n-te Ableitung.
- Ein Zufallsgenerator liefert reelle, gleichverteilte Zufallszahlen  $x_i$  mit  $0 \leq x_i < 1$ . E bezeichne das Ereignis, dass drei Zufallswerte  $x_1, x_2, x_3$  geordnet erscheinen:  $x_1 < x_2 < x_3$ . Skizziere die möglichen sowie die zu E gehörigen günstigen Fälle als Raumgebiete in einem  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem und ermittle die Wahrscheinlichkeit von E.