Lösung der Aufgabe 1

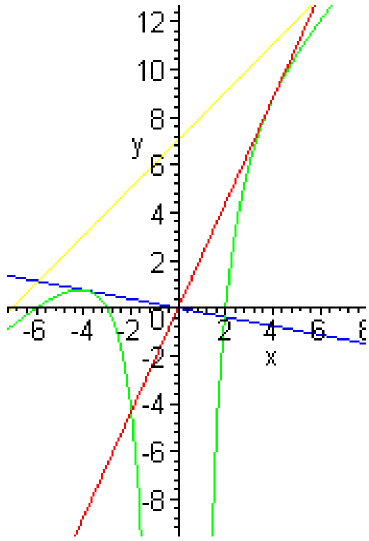
a) Definitionsbereich $D = \{x \mid x \neq 0\}$

Asymptoten: vertikal $\underline{x = 0}$; schief $(x+7x^2-36) : x^2 = x+7-\frac{36}{x^2}$, also $\underline{y = x + 7}$

Nullstellen $x^3-7x^2-36 = 0$ Durch Probieren : $x_1 = 2$
Polynomdivision: $(x+7x^2-36) : (x-2) = x^2+9x+18$; die zugehörige Gleichung hat die Lösungen $x_2 = -3$ und $x_3 = -6$

Ableitungen $f'(x) = (x+7-\frac{36}{x^2})' = 1 + \frac{72}{x^3}$

$f'(x) = 0$ für $x_4 = -\sqrt[3]{72} = 2 \cdot \sqrt[3]{9} = -4{,}16...$ ist Stelle eines Maximums (aus dem Graphen)



b) $f''(x) = -\frac{216}{x^4} < 0$. Die zweite Ableitung ist für alle $x \in D$ negativ, also ist f überall konkav.

c) $F = \int_{-6}^{-3} (x + 7 - 36 \cdot x^{-2}) = \left[\frac{x^2}{2} + 7x + \frac{36}{x} \right]_{-6}^{-3} = 1{,}5$

d) Tangentengleichung $y = m \cdot x$

Im Berührungspunkt (x_o/y_o) ist $mx_o = x_o+7-\frac{36}{x_o^2}$ und die Steigung $m = 1 + \frac{72}{x_o^3}$. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man $x_o = \pm\sqrt{\frac{108}{7}}$

Lösung der Aufgabe 2

a) Die Projektion g' der Geraden g in die Grundebene hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Winkel γ zwischen den Richtungsvektoren von g und g' beträgt $\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$, $\gamma = 26{,}56...^\circ$

b) Die Kugelgleichung erhält man aus dem konstanten Abstand r eines Kugelpunktes $P(x/y/z)$ vom Mittelpunkt M. Hier ist $M = (0/0/0)$ und $r = 7$, also $\overline{MP}^2 = x^2+y^2+z^2 = 49$

Setzt man die Komponenten der Geradengleichung in die Kugelgleichung ein, so erhält man $(5+2t)^2 + 2^2 + (-2+t)^2 = 49$, also $\underline{5t^2 + 16t - 16 = 0}$, woraus sich $t_1 = 0.8$ und $t_2 = -4$ ergibt; die Schnittpunkte sind $S_1(6.6 / 2 / -1.2)$ und $S_2(-3 / 2 / -6)$.

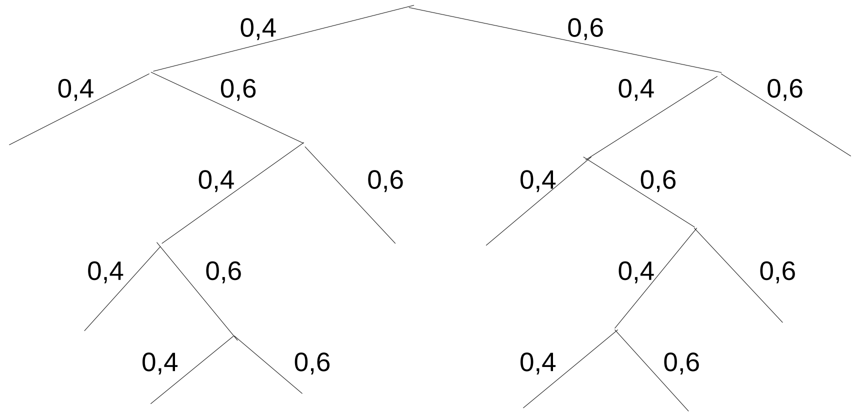
c) Einsetzen der Komponenten der Geradengleichung mit allgemeinem p in die Kugelgleichung : $(5+2t)^2 + 2^2 + (p+t)^2 = 49$ ergibt $5t^2 + (2p+20)t + p^2 - 16 = 0$ Gleichung *)
Die beiden möglichen Schnittpunkte fallen in einem Berührungspunkt zusammen, wenn diese quadratische Gleichung nur eine Lösung hat, d.h. wenn die Diskriminante der allgemeinen Lösung Null ist : $D = (2p + 20)^2 - 20(p^2 - 20) = -16(p^2 - 5p - 50) = 0$; daraus ergibt sich $p_1 = 10$ und $p_2 = -5$

und daraus die Tangenten t_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und t_2 : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Tangentialebene durch die Tangente t_1: $p_1 = 10$ in die quadratische Gleichung *) einsetzen: $5t^2 + 30t + 84 = 0$. Weil D = 0 ist, erhält man t = -4 und den Berührungspunkt B(-3 / 2 / 6) dieser Tangente. Die Gerade durch den Kugelmittelpunkt M und durch B steht senkrecht zur Tangentialebene, also lautet die Gleichung dieser Ebene: 3x - 2y - 67 + const. = 0; weil B auf der Ebene liegt, folgt const. = 49.

Lösung der Aufgabe 3

P(A) = 0,4; P(B) = 0,6



a) Binomische Verteilung : P(gleich viele Siege) = $P_6(3) = \binom{6}{3} 0{,}4^3\, 0{,}6^3 = 6 \cdot 0{,}24^3 = 0{,}276$

P(Bea gewinnt mehr) = $P_6(0)+P_6(1)+P_2(2) = 0.6^6 + 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 + 15 \cdot 0.4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}544$

b) P(Albin gewinnt) =
$0{,}4^2 + 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}4^2(1 + 0{,}5 + 0{,}24 + 0{,}288) = 0{,}340$

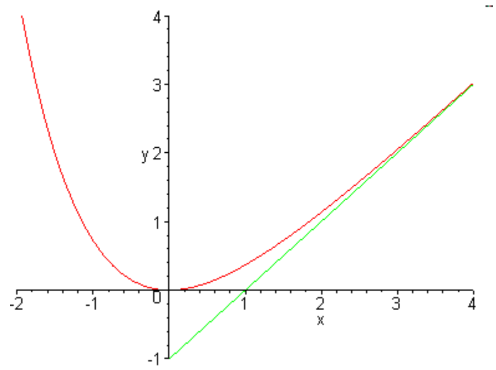
c) (Formel von Bayes)

$$P(1.\text{Spiel} \mid \text{Albin gewinnt}) = \frac{P(1.\text{Spiel} \wedge \text{Albin gewinnt})}{P(\text{Albin gewinnt})} = \frac{0{,}4^2(1+0{,}24+0{,}144)}{0{,}4^2(1+0{,}6+0{,}24+0{,}288)} = 0{,}340$$

d)

Anzahl Spiele	2	3	4	5	Erwartungswert μ = 2,8352
Wahrscheinlichkeit	0,52	0,24	0,1248	0,1152	Dauer : 56,7 Minuten

Lösung der Aufgabe 4



a) $f_1(x) = x + e^{-x} - 1$; Asymptote ist y = x + 1, da e^{-x} für wachsendes x verschwindet
$f'(x) = 1 - e^{-x}$; $f'(x) = 0$ für x = 0

b) $\int_0^b (x - e^{-x} + 1)dx - \int_1^b (x-1)dx = -e^{-b} + \frac{1}{2}$

Für $b \to \infty$ erhält man die Fläche ½ .

c) $f_a'(x) = a - e^{-x}$; $f_a''(x) = e^{-x}$
Man erhält die Extremalstelle bei x = - ln a und f”(- ln a) = 1 > 0, also ein Minimum; die y-Koordinate ist y = -a ln a + a - 1

d) Das Gleichungssystem aus c) $\quad x = -\ln a \quad \Rightarrow a = e^{-x}$
$\quad y = -a \ln a + a - 1$
liefert die Gleichung $\quad y = (x+1) \cdot e^{-x} - 1$

Lösung der Aufgabe 5

a) Für n = 1 gilt : $a + aq = a\cdot\frac{q^1-1}{q-1}$; falls für n die Behauptung richtig ist, so folgt für die Summe mit dem nächsten Summanden $a\cdot q^n$:

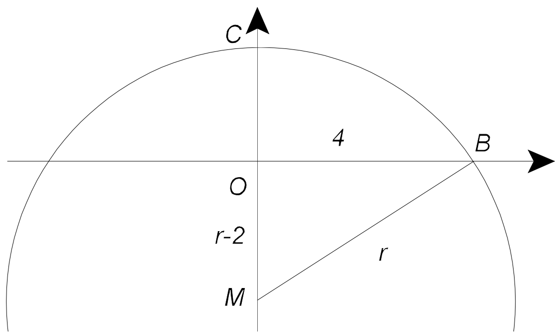
$a + aq + ... + aq^{n-1} + aq^n = a\cdot\frac{q^n-1}{q-1} + aq^n = a\cdot\frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{1-q} = a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{1-q}$. Die Behauptung gilt dann also auch für die Summe mit dem nächsten Summanden, unabhängig von n.

b) Die Ebene $sx + s^{-0,5}y + z = 1$ hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} s \\ s^{-\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$; die Normale n durch den Ursprung (0 / 0 / 0) schneidet die Ebene : $s \cdot (0+t\cdot s) + s^{-0,5} \cdot (0+t\cdot s^{-0,5)} + 1 - 1 = 0$. Man erhält durch Umformen die Gleichung $t_o \cdot (s^2 - \frac{1}{s} + 1) = 1$ oder $t_o = \frac{1}{s^2 - \frac{1}{s} + 1}$. Setzt man diesen Wert von t_o in die Gleichung der Normalen n : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} s \\ s^{-\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein, so erhält man den Fusspunkt des Lotes von O auf die Ebene, welcher extremalen Abstand vom Ursprung haben muss; dies ist dann der Fall, wenn der Wert t_o (Streckfaktor des Richtungsvektors der Normalen) oder (was einfacher zu rechnen ist) sein Reziprokwert $\frac{1}{t_o}$ extremal ist :

$f(s) = s^2 + \frac{1}{s} + 1$ extremal, d.h. $\frac{df}{ds} = 2s - \frac{1}{s^2} = 0$; man erhält den Wert $s = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Da die zweite Ableitung $2 + \frac{2}{s^3}$ von f an dieser Stelle positiv ist, hat der Reziprokwert von t_o ein Minimum, der Wert t_o also ein Maximum. Der Abstand ist maximal.

c) Man erhält im Dreieck OMB
$r^2 = (r-2)^2 + 4^2$
$r = 5$ und $M(0 / -3)$
Die Kreisgleichung lautet :
$x^2 + (y + 3)^2 = 25$

oder $y = +\sqrt{25-x^2} - 3$ (Meridian, Funktionsgleichung der Kurve oberhalb der x-Achse)



Rotationsvolumen :

$$V = \pi\cdot\int_{-4}^{4} y^2 dx = 2\pi\int_0^4 (34 - x^2 - 6\sqrt{25-x^2})dx \text{ = (nach Formelsammlung)}$$

$$= 2\pi\,[34x - \frac{x^3}{3}\cdot\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}]_0^4 = 57{,}30...$$